Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Teoria de Màquines i Mecanismes

Exàmens Curs 2023-2024

Lluïsa Jordi Nebot

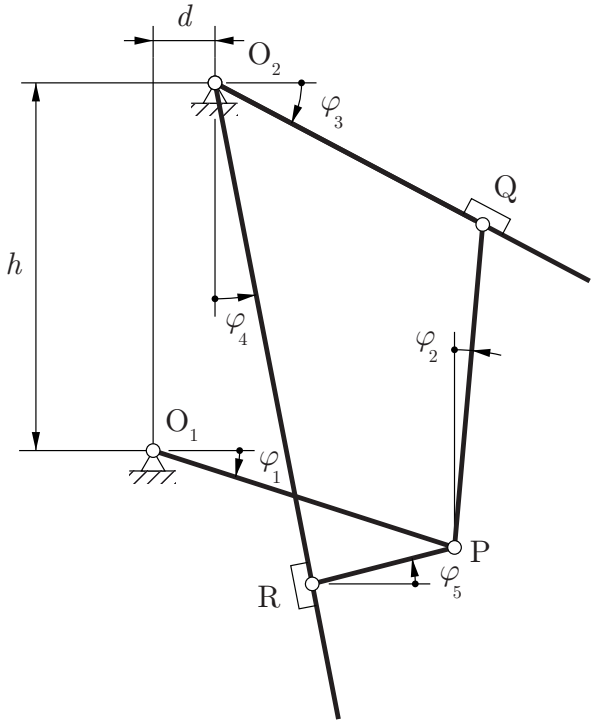
Joan Puig Ortiz

Enrique Zayas Figueras

Departament d'Enginyeria Mecànica

- Contingut del sobre: Enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar els dos exercicis es disposa d'**una hora i quart**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

Exercici 1 [6 punts]



$|O_1P| = l_1 = 155$ mm
$|PQ| = l_2 = 160$ mm
$|O_2Q| = l_3 = 140$ mm
$|O_2R| = l_4 = 250$ mm
$|RP| = l_5 = 70$ mm
$h = 180$ mm
$d = 30$ mm

La fotografia i l'esquema de la figura corresponen al d'una escala d'ús domèstic. L'anàlisi del mecanisme es realitza considerant que la pota esquerra és fixa a terra i emprant el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}^{\mathrm{T}}$.

Determineu:

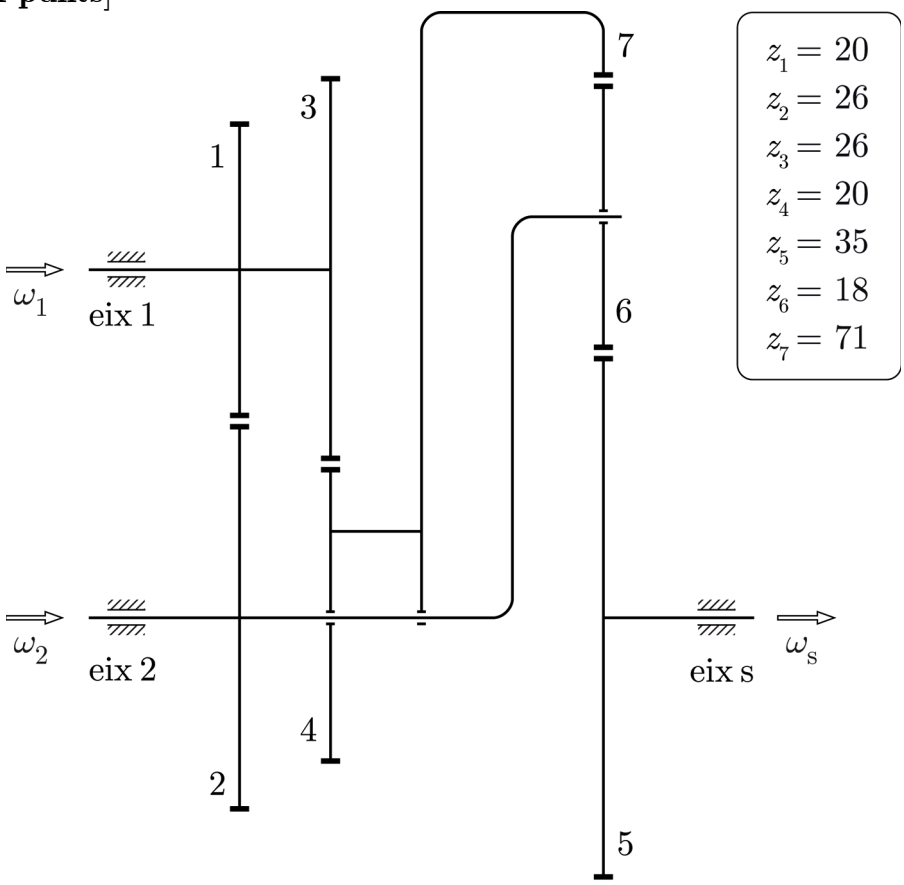
a) El nombre de graus de llibertat i la possible existència de redundàncies. Justifiqueu adequadament les respostes.

b) Les equacions d'enllaç geomètriques i la seva matriu jacobiana $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}$.

c) Els centres instantanis de rotació, $\mathrm{I}_{\mathrm{PQ/terra}}$ i $\mathrm{I}_{\mathrm{RP/terra}}$, de les bieles PQ i RP respecte el terra.

d) Les velocitats angulars $\dot{\varphi}_2$ i $\dot{\varphi}_3$ en la configuració de punt mort mínim de φ_1.

Exercici 2 [4 punts]



El tren d'engranatges de la figura es pot accionar per l'eix 1 o per l'eix 2. Per al seu estudi s'utilitza el vector de velocitats generalitzades $\boldsymbol{u} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_s\}^T$. Determineu:

a) El nombre de graus de llibertat del tren d'engranatges. Justifiqueu la vostra resposta.

b) Les equacions cinemàtiques d'enllaç entre les velocitats generalitzades.

c) El valor de la relació de transmissió si el tren s'acciona per l'eix 1.

d) El valor de la relació de transmissió si el tren s'acciona per l'eix 2.

Solució – Exercici 1

a) Si s'atura la velocitat angular de la barra O_1P, $\dot{\varphi}_1 = 0$, el punt P queda fix a terra i es formen dos triangles indeformables O_2PQ i O_2RP. El mecanisme queda totalment aturat. Per tant, el mecanisme té un grau de llibertat.

Per altra banda, es pot considerar que el mecanisme està format pel quadrilàter articulat O_1PQO_2 i un grup d'Assur O_2RP. També es pot considerar que el mecanisme està format pel quadrilàter articulat O_2RPQO_2 i un grup d'Assur PO_1O_2.

Si s'aplica el criteri de superposició de restriccions del moviment (criteri de Grübbler-Kutzbach) dona un número igual a 1.

$5 \cdot (\text{sòlids mòbils}) \times 3 - 7 \cdot (\text{articulacions}) \times 2 = 1.$

El mecanisme no presenta redundàncies totals ja que coincideixen el nombre de graus de llibertat i el número de Grübbler–Kutzbach.

b) Com que s'empren 5 coordenades generalitzades i només n'hi ha una d'independent cal determinar 4 equacions d'enllaç geomètriques que s'obtenen, per exemple, imposant el tancament dels anells $O_1PQO_2O_1$ i $O_1PRO_2O_1$.

$$\begin{cases} l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 - l_3 \cos\varphi_3 - d = 0 \\ -l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 + l_3 \sin\varphi_3 - h = 0 \\ l_1 \cos\varphi_1 - l_5 \cos\varphi_5 - l_4 \sin\varphi_4 - d = 0 \\ -l_1 \sin\varphi_1 - l_5 \sin\varphi_5 + l_4 \cos\varphi_4 - h = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = 0$$

La matriu jacobiana s'obté derivant les equacions d'enllaç geomètriques respecte a les coordenades generalitzades.

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\varphi_1 & l_2 \cos\varphi_2 & l_3 \sin\varphi_3 & 0 & 0 \\ -l_1 \cos\varphi_1 & -l_2 \sin\varphi_2 & l_3 \cos\varphi_3 & 0 & 0 \\ -l_1 \sin\varphi_1 & 0 & 0 & -l_4 \cos\varphi_4 & l_5 \sin\varphi_5 \\ -l_1 \cos\varphi_1 & 0 & 0 & -l_4 \sin\varphi_4 & -l_5 \cos\varphi_5 \end{pmatrix}$$

c) La velocitat del punt P és perpendicular a O_1P. Per tant, el centre instantani de rotació de la biela PQ respecte al terra, $I_{PQ/terra}$, es troba sobre la recta O_1P.

La velocitat del punt Q és perpendicular a O_2Q. Per tant, el centre instantani de rotació de la biela PQ respecte al terra, $I_{PQ/terra}$, es troba sobre la recta O_2Q.

Per tant, $I_{PQ/terra}$ es troba en la intersecció de les rectes O_1P i O_2Q.

La velocitat del punt R és perpendicular a O_2R. Per tant, el centre instantani de rotació de la biela RP respecte al terra, $I_{RP/terra}$, es troba sobre la recta O_2R.

Per tant, $I_{RP/terra}$ es troba en la intersecció de les rectes O_1P i O_2R.

d) En la configuració corresponent al mínim de la coordenada φ_1, la velocitat angular $\dot{\varphi}_1$ és nul·la. En aquesta configuració, el punt P té velocitat nul·la i és el centre instantani de rotació de la barra RP respecte al terra, és a dir el punt de tall entre O_1P i O_2R és el punt P. Els punts O_2, P i R estan alineats i en aquest ordre.

En aquesta configuració, el punt Q tindria una velocitat perpendicular a PQ, la qual cosa és impossible perquè $\boldsymbol{v}(Q)$ ha de ser perpendicular a O_2Q. Per tant, $\boldsymbol{v}(Q) = 0$. En conseqüència, $\dot{\varphi}_2 = 0$ i $\dot{\varphi}_3 = 0$.

La configuracio de punt mort mínim de φ_1 també és configuració de punt mort per a les coordenades φ_2 i φ_3.

Solució – Exercici 2

a) El tren d'engranatges de la figura es pot considerar format per dos engranatges d'eixos fixos i un tren epicicloidal simple.

Si s'atura la rotació de l'eix 1 ($\omega_1 = 0$) la roda 2 i la roda 4 no giren. En conseqüència tampoc no gira la roda 7 ni el braç del tren epicicloidal simple. Per tant, tot queda aturat. El tren d'engranatges té 1 grau de llibertat.

b) Tenint en compte que s'utilitzen 4 velocitats generalitzades i només n'hi ha una d'independent, calen 3 equacions cinemàtiques d'enllaç que sortiran d'estabir les diferents relacions de transmissió.

Si en el primer engranament d'eixos fixos es pren com a entrada la roda 1 i com a sortida la roda 2 es pot escriure:

$$\tau_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{z_1}{z_2} = -\frac{10}{13} = -0,7692 \qquad \rightarrow \qquad \tau_1\,\omega_1 - \omega_2 = 0$$

Si en el segon engranament d'eixos fixos es pren com a entrada la roda 3 i com a sortida la roda 4 es pot escriure:

$$\tau_2 = \frac{\omega_4}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_4} = -\frac{13}{10} = -1,3 \quad \rightarrow \quad \tau_2\,\omega_3 - \omega_4 = 0$$

Si per al tren epicicloidal simple es pren com a entrada la roda 7 i com a sortida la roda 5 es pot escriure:

$$\tau_3 = \frac{\omega_{5/\mathrm{b}}}{\omega_{7/\mathrm{b}}} = \frac{\omega_5 - \omega_\mathrm{b}}{\omega_7 - \omega_\mathrm{b}} \qquad \rightarrow \qquad \tau_3\,\omega_7 + \left(1 - \tau_3\right)\omega_\mathrm{b} - \omega_5 = 0$$

$$\text{amb} \;\; \tau_3 = \left(\pm\right)\frac{\prod z_{\text{conductores}}}{\prod z_{\text{conduides}}} = -\frac{z_7 \cdot z_6}{z_6 \cdot z_5} = -\frac{71}{35} = -2,029.$$

En la unió: $\omega_1 = \omega_3$; $\omega_4 = \omega_7$ i $\omega_2 = \omega_\mathrm{b}$. Per tant, es pot escriure:

$$\tau_1\,\omega_1 - \omega_2 = 0$$
$$\tau_2\,\omega_1 - \omega_4 = 0$$
$$\tau_3\,\omega_4 + \left(1 - \tau_3\right)\omega_2 - \omega_5 = 0$$

c) Tenint en compte que $\omega_\mathrm{s} = \omega_5$ si el tren s'acciona per l'eix 1 la relació de transmissió és:

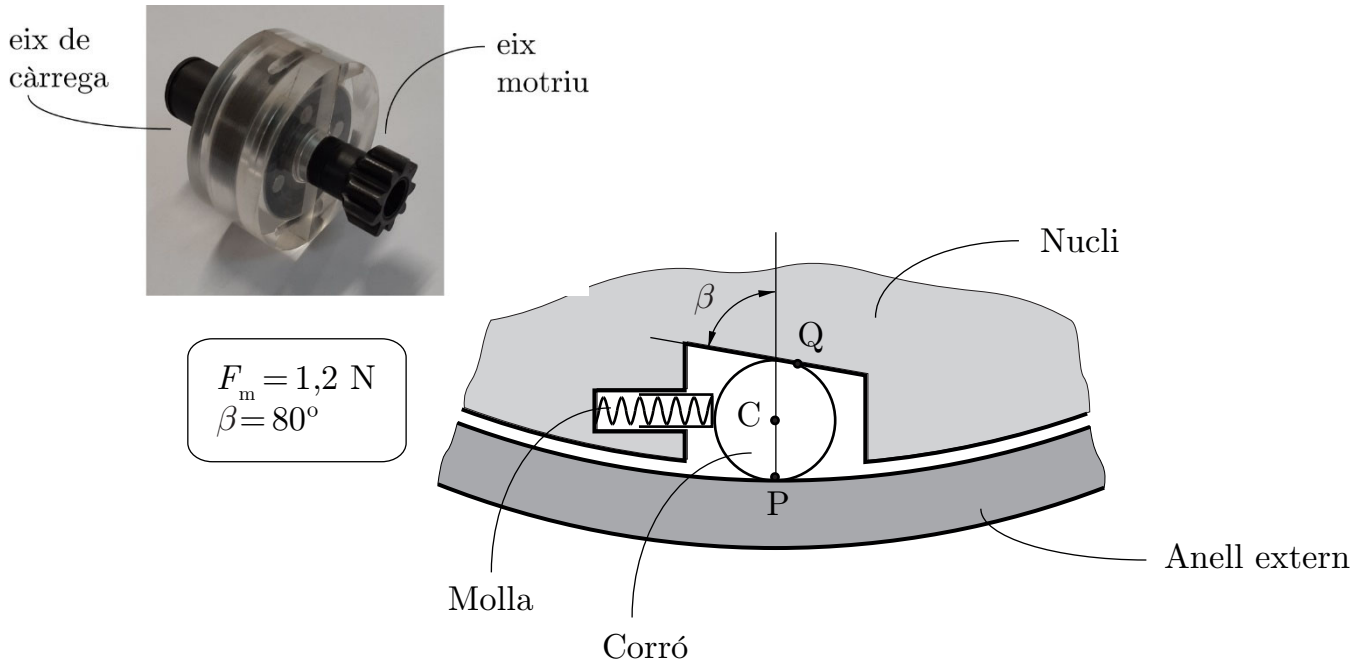
$$\frac{\omega_\mathrm{s}}{\omega_1} = \frac{\omega_5}{\omega_1} = \tau_3\tau_2 + \left(1 - \tau_3\right)\tau_1 = 0,3075.$$

d) Si el tren s'acciona per l'eix 2 la relació de transmissió és:

$$\frac{\omega_\mathrm{s}}{\omega_2} = \frac{\omega_5}{\omega_2} = \frac{\tau_3\tau_2}{\tau_1} + \left(1 - \tau_3\right) = -0,3997.$$

- Contingut del sobre: enunciat, 4 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar l'examen es disposa de **tres hores**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

Exercici 1 [2,5 punts]



Un dels components del motor d'arrencada d'un automòbil és un mecanisme de roda lliure, com el mostrat a la fotografia.

El mecanisme de roda lliure permet a un eix girar lliurement en un sentit i ser arrossegat en sentit contrari, és a dir desacobla la rotació de l'eix motriu de la rotació de l'eix de càrrega.

El mecanisme analitzat té 4 elements uniformement distribuïts, com el mostrat a l'esquema. La molla empeny, amb una força F_m, el corró que manté contacte amb la pista exterior del nucli i la interior de l'anell extern. Determineu:

a) Determineu les forces de contacte, N_P i N_Q, en els punts P i Q si el frec fos negligible.

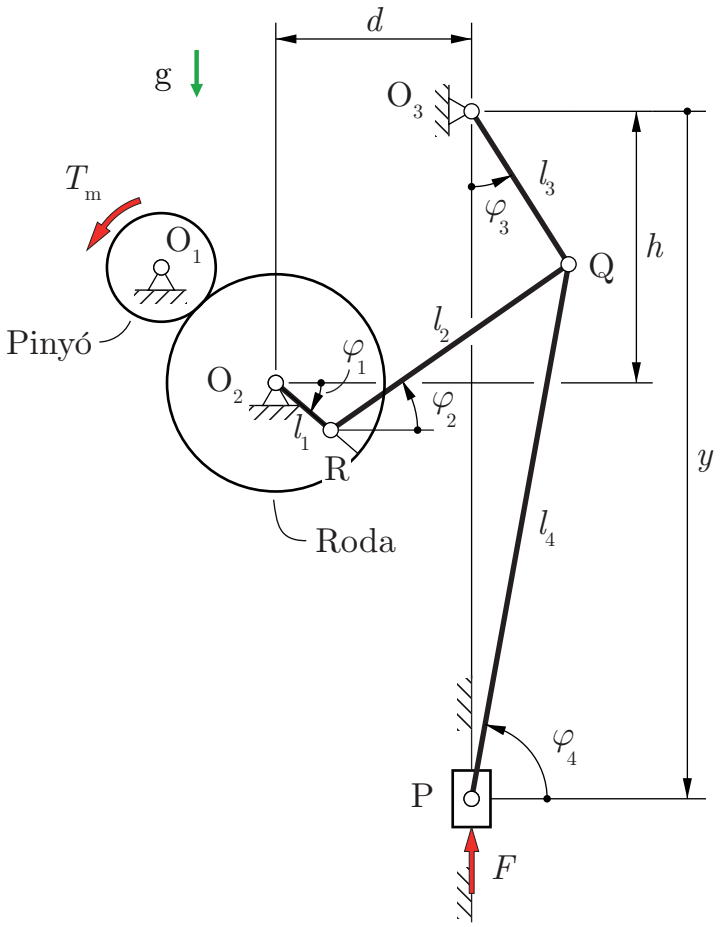
b) Dibuixeu el diagrama de cos lliure del corró quan hi ha frec a P i a Q.

c) Determineu el coeficient de frec mínim, μ_{min}, a P i Q per tal de garantir el falcament i assegurar que nucli i anell extern giren en el mateix sentit. Justifiqueu la vostra resposta.

d) Raoneu adequadament quin és el sentit de gir del nucli que permet que la rotació dels dos elements, nucli i anell extern, estigui desacoblada.

Exercici 2 [4,5 punts]

$d = 108$ mm
$h = 150$ mm
$l_1 = 40$ mm
$l_2 = 160$ mm
$l_3 = 100$ mm
$l_4 = 300$ mm
$z_1 = 23$
$z_2 = 46$



La figura mostra l'esquema d'una premsa que s'acciona amb un motor, no representat, que fa girar el pinyó de centre O_1. El pinyó engrana amb la roda de centre O_2 solidària a la manovella O_2R.

Per a la seva anàlisi cinemàtica, s'empra el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, y\}^{\mathrm{T}}$. Determineu:

a) Les equacions d'enllaç geomètriques i la seva matriu jacobiana, $\boldsymbol{\Phi}_q$.

b) La velocitat angular $\dot{\varphi}_3$ del balancí O_3Q i la velocitat vertical $\dot{y}$ de la corredora, en funció de la velocitat angular $\dot{\varphi}_1$ de la manovella O_2R i de la configuració.

Quan la premsa està treballant, en règim estacionari, la corredora P rep de la peça premuda, situada quasi al final de la cursa de la corredora, una força $F = 50$ N. Determineu:

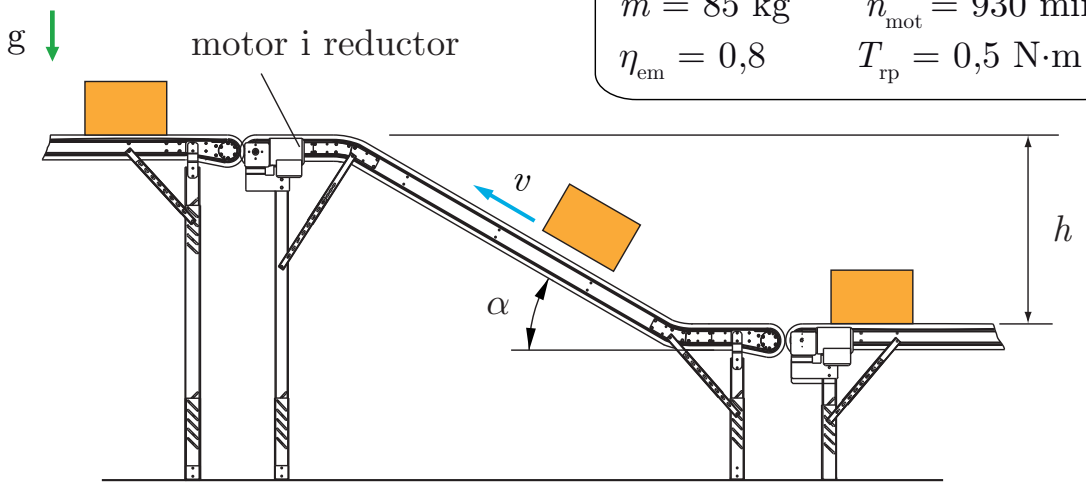
c) L'expressió del parell motor T_{m} que actua sobre el pinyó en funció de la configuració a causa de la força F. Particularitzeu-ne el valor per a la configuració de punt mort màxim de la coordenada y. Justifiqueu les hipòtesis que realitzeu.

d) L'expressió de la força F_{PQ} a la qual està sotmesa la barra PQ quan actua la força F sobre la corredora. Especifiqueu si la barra PQ està sotmesa a tracció o a compressió.

Segueix al darrera →

Exercici 3 [3 punts]

$h = 1{,}8$ m	$\alpha = 30^{o}$
$d = 189$ mm	$i = 23$
$v = 0{,}4$ m/s	$t_{cicle} = 12$ s
$m = 85$ kg	$n_{mot} = 930$ min^{-1}
$\eta_{em} = 0{,}8$	$T_{rp} = 0{,}5$ N·m



La figura mostra una cinta transportadora inclinada emprada per transferir paquets entre dues cintes horitzontals situades a diferent nivell.

La cinta és arrossegada per un corró motriu de diàmetre d, situat a la part superior, i es manté sempre tibada.

El corró motriu és accionat, a través d'un reductor de relació de reducció i, per un motor elèctric, de rendiment electromecànic η_{em}.

En règim estacionari, la cinta es mou a velocitat v constant i cada cert temps, t_{cicle}, rep un paquet de massa m.

Les resistències passives del conjunt reductor + cinta són equivalents a un parell T_{rp} reduït a l'eix del motor.

Es realitzen les següents hipòtesis:

- Els paquets entren a la cinta i en surten a la seva velocitat i, mentre hi són, s'hi mantenen en repòs.
- El rendiment i les resistències passives no depenen de l'estat de càrrega.
- El motor gira a velocitat nominal en el règim estacionari.

Determineu, en règim estacionari:

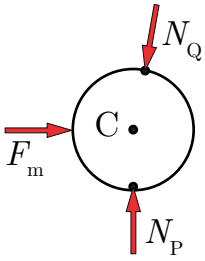
a) El nombre de paquets simultanis, n_{sim}, que hi ha sobre la cinta.

b) L'energia elèctrica, E_{elec}, necessària per elevar paquets durant un temps $t = 1$h.

c) El parell motor, T_m, que cal aplicar a l'eix d'entrada del reductor. Feu-ne el gràfic, en funció del temps, per a 2 cicles de funcionament (Indiqueu correctament les escales i les unitats).

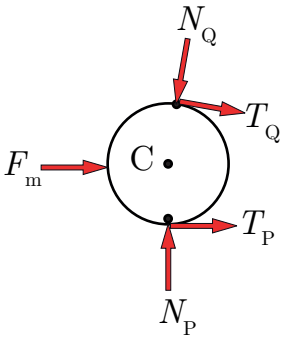
Solució Exercici 1

a) Si en els punts de contacte P i Q el frec és negligible el diagrama de cos lliure del corró és el mostrat a la figura. L'aplicació del teorema de la quantitat de moviment al corró permet deduir:



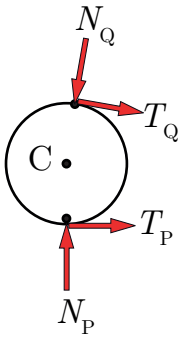
$$F_m - N_Q \cos\beta = 0 \;\rightarrow\; N_Q = \frac{F_m}{\cos\beta} = 6{,}911 \text{ N}$$

$$N_P - N_Q \sin\beta = 0 \;\rightarrow\; N_P = F_m \tan\beta = 6{,}806 \text{ N}$$



b) El diagrama de cos lliure quan hi ha frec a P i a Q és el mostrat a la figura.

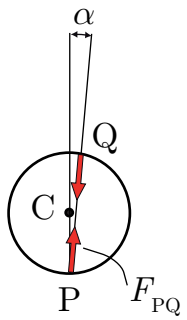
c) En l'estudi del falcament les forces finites, com la de la molla, no hi intervenen. En aquest cas, el diagrama de cos lliure del corró és el mostrat a la figura. L'aplicació dels teoremes vectorials al corró permet escriure:



$$\sum_{\text{corró}} F_{\text{ext}} = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} T_P - N_Q \cos\beta + T_Q \sin\beta = 0 \\ N_P - N_Q \sin\beta - T_Q \cos\beta = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{\text{corró}} M_{\text{ext}}(\text{C}) = 0 \rightarrow T_P\, r - T_Q\, r = 0 \quad \rightarrow \quad T_P = T_Q$$

En el límit $T_P = \mu \cdot N_P$ i $T_Q = \mu \cdot N_Q$ amb la qual cosa: $\mu = \dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta} = 0{,}0875$.



Alternativament, es pot pensar en el fet que la força resultant a P i la força resultant a Q, F_{PQ}, han de tenir la direcció PQ. De la figura es dedueix que:

$\tan\alpha = \mu$, amb $\alpha = \dfrac{90-\beta}{2}$. Amb la qual cosa, $\mu = 0{,}0875$.

d) En el falcament, la força resultant a Q, F_{PQ}, és produïda per un parell en sentit horari sobre el nucli. La rotació desacoblada es produirà, per tant, quan el nucli giri en sentit antihorari.

Solució Exercici 2

a) Les equacions d'enllaç es troben, per exemple, imposant la condició de tancament de l'anell $O_2RQO_3O_2$ i la matriu jacobiana s'obté derivant-les respecte a les coordenades generalitzades.

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 - l_3 \sin\varphi_3 - d = 0 \\ -l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 + l_3 \cos\varphi_3 - h = 0 \\ l_3 \sin\varphi_3 - l_4 \cos\varphi_4 = 0 \\ -l_3 \cos\varphi_3 - l_4 \sin\varphi_4 + y = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\varphi_1 & -l_2 \sin\varphi_2 & -l_3 \cos\varphi_3 & 0 & 0 \\ -l_1 \cos\varphi_1 & l_2 \cos\varphi_2 & -l_3 \sin\varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \cos\varphi_3 & l_4 \sin\varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \sin\varphi_3 & -l_4 \cos\varphi_4 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La velocitat angular $\dot{\varphi}_3$ del balancí O_3Q i la velocitat vertical $\dot{y}$ de la corredora en funció de la velocitat angular $\dot{\varphi}_1$ de la manovella O_2R es poden obtenir operant amb les equacions cinemàtiques d'enllaç:

$$\dot{\varphi}_3 = -\dot{\varphi}_1 \, \frac{l_1}{l_3} \, \frac{\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}{\cos\left(\varphi_2 - \varphi_3\right)} \qquad \dot{y} = \dot{\varphi}_1 \, l_1 \, \frac{\cos\left(\varphi_3 - \varphi_4\right) \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}{\cos\left(\varphi_2 - \varphi_3\right) \sin\varphi_4}.$$

Alternativament, també es poden obtenir a partir de l'expressió de l'anàlisi de velocitats:

$$\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{d}} = -\left(\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{d}}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{i}} \, \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{i}} + \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{t}}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_4 \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = -\begin{pmatrix} -l_2 \sin\varphi_2 & -l_3 \cos\varphi_3 & 0 & 0 \\ l_2 \cos\varphi_2 & -l_3 \sin\varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 \cos\varphi_3 & l_4 \sin\varphi_4 & 0 \\ 0 & l_3 \sin\varphi_3 & -l_4 \cos\varphi_4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -l_1 \sin\varphi_1 \\ -l_1 \cos\varphi_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dot{\varphi}_1$$

$$\dot{\varphi}_3 = -\dot{\varphi}_1 \, \frac{l_1}{l_3} \, \frac{\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}{\cos\left(\varphi_2 - \varphi_3\right)} \qquad \dot{y} = \dot{\varphi}_1 \, l_1 \, \frac{\cos\left(\varphi_3 - \varphi_4\right) \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}{\cos\left(\varphi_2 - \varphi_3\right) \sin\varphi_4}$$

c) Per determinar el parell T_{m} que actua sobre el pinyó a causa de la força F es proposa emprar el mètode de les Potències Virtuals. Tenint en compte que la dinàmica és lineal pel que fa a les forces, es determina l'expressió de T_{m} considerant que són negligibles les masses i les inèrcies de les barres i el frec en els enllaços.

Es pren com sistema el mecanisme i es realitza un moviment virtual compatible amb els enllaços per tal que no apareguin les forces d'enllaç en l'expressió de les potències virtuals.

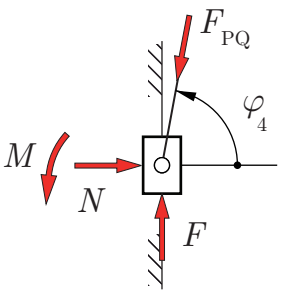
$$\sum_{\text{sistema}} P^* = 0 \quad \rightarrow \quad T_{\text{m}}\omega^*_{\text{pinyó}} - F\,\dot{y}^* = 0 \quad \rightarrow \quad T_{\text{m}} = F\,\frac{\dot{y}^*}{\omega^*_{\text{pinyó}}} = F\,\frac{z_1}{z_2}\,\frac{\dot{y}^*}{\dot{\varphi}_1^*}.$$

La relació entre les velocitats virtuals $\dot{\varphi}_1^*$ i $\dot{y}^*$ coincideix amb la relació entre les velocitats reals, ja que es realitza un moviment virtual compatible amb els enllaços. Per tant, amb les relacions trobades a l'apartat *b*), s'obté l'expressió del parell T_{m}.

$$T_{\text{m}} = F\,\frac{z_1}{z_2}\,l_1\,\frac{\cos\left(\varphi_3 - \varphi_4\right)\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}{\cos\left(\varphi_2 - \varphi_3\right)\sin\varphi_4}.$$

En la configuració de punt mort màxim de la coordenada y, els angles φ_3 i φ_4 valen 0° i 90° respectivament. En conseqüència, a causa de la força F, $T_{\text{m}} = 0$ N·m.

d) Per determinar la força F_{PQ} a la qual està sotmesa la barra PQ quan actua la força F s'analitza la corredora P. El diagrama de sòlid lliure és el mostrat a la figura i es dedueix que:



$$N - F_{\text{PQ}}\cos\varphi_4 = 0$$

$$F - F_{\text{PQ}}\sin\varphi_4 = 0 \quad \rightarrow \quad F_{\text{PQ}} = \frac{F}{\sin\varphi_4}$$

$$M = 0$$

Quan actua la força F, F_{PQ} és positiva. En conseqüència, la barra PQ està sotmesa a compressió.

Solució Exercici 3

a) Per determinar el nombre de paquets simultanis, n_{sim}, que hi ha sobre la cinta, cal conèixer el temps que triga un paquet a pujar.

$$t_{\text{paquet}} = \frac{h}{v\sin\alpha} = 9\text{ s} \rightarrow \quad t_{\text{no paquet}} = t_{\text{cicle}} - t_{\text{paquet}} = 3\text{ s}.$$

Per tant, com que un paquet triga 9 s a pujar i el cicle es repeteix cada 12 s, es pot assegurar que simultàniament només hi ha 1 paquet sobre la cinta, $n_{\text{sim}} = 1$.

b) El nombre de paquets n_{paquets} elevats en una hora és de 300.

L'aplicació del principi de conservació de l'energia al sistema reductor + cinta condueix a:

$$E_{\text{subministrada}} = E_{\text{acumulada}} + E_{\text{cedida}} \quad \rightarrow \quad E_{\text{motor}} = \Delta E_{\text{p}} + E_{\text{rp}}$$

$$E_{\text{motor}} = m\,g\,h\,n_{\text{paquets}} + T_{\text{rp}}\,\omega_{\text{m}}\,t = 625{,}4\text{ kJ}.$$

$$E_{\text{elec}} = \frac{E_{\text{motor}}}{\eta_{\text{em}}} = 781,8 \text{ kJ} = 217,2 \text{ W·h}.$$

c) El parell motor, T_{m}, que cal aplicar a l'eix d'entrada del reductor es pot obtenir si s'aplica el principi de conservació de l'energia al sistema reductor + cinta en versió diferencial:

$$P_{\text{subministrada}} = P_{\text{acumulada}} + P_{\text{cedida}} \quad \rightarrow \quad P_{\text{motor}} = \dot{E}_{\text{p}} + P_{\text{rp}}$$

$$T_{\text{m}}\omega_{\text{m}} = m\,g\,v \sin\alpha + T_{\text{rp}}\,\omega_{\text{m}}, \text{ amb } v = \omega_{\text{c}}\,r = \frac{\omega_{\text{m}}}{i}\,r.$$

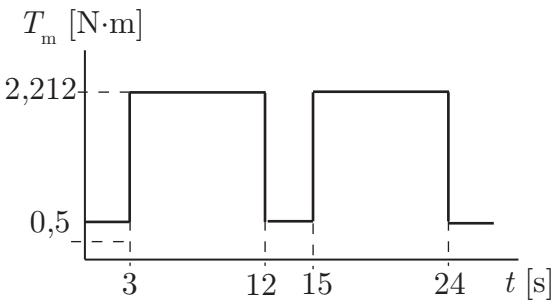
Per tant, quan hi ha 1 paquet sobre la cinta, l'expressió i el valor de T_{m} són:

$$T_{\text{m1}} = m\,g\,\frac{r}{i}\sin\alpha + T_{\text{rp}} = 2,212 \text{ N·m}.$$

Quan no hi ha paquet sobre la cinta, el valor de T_{m} és:

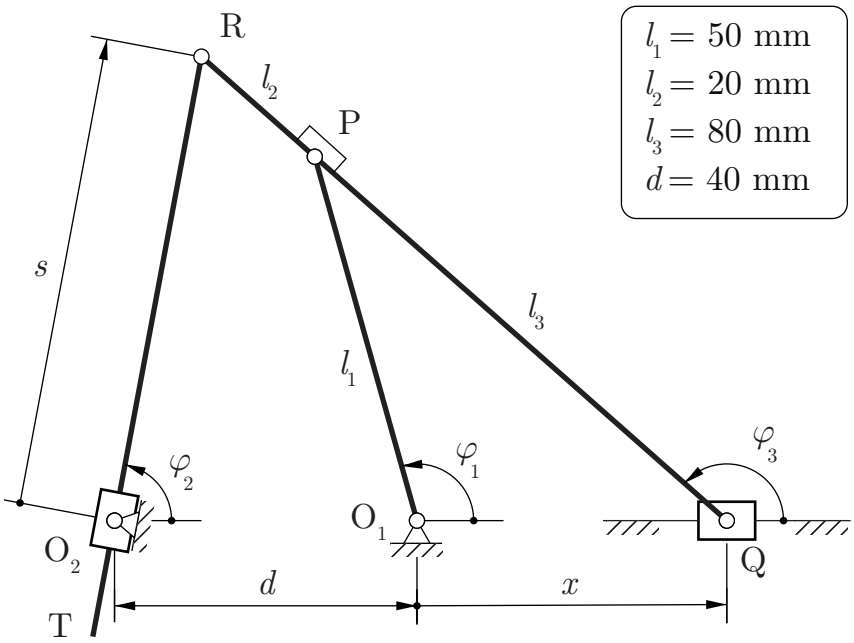
$$T_{\text{m2}} = T_{\text{rp}} = 0,5 \text{ N·m}.$$

El gràfic del parell motor T_{m} és el mostrat a la figura.



- Contingut del sobre: enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar els dos exercicis es disposa d'**una hora i quart**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

Exercici 1 [5 punts]



El mecanisme de la figura s'acciona a través d'un motor i un tren d'engranatges, no representants, que fan girar la barra O_1P. Per realitzar l'anàlisi cinemàtica del mecanisme, s'empra el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, x, s\}^{\mathrm{T}}$. Determineu:

a) El nombre de graus de llibertat i la possible existència de redundàncies. Justifiqueu adequadament les vostres respostes.

b) Un conjunt d'equacions d'enllaç geomètriques entre les coordenades i la seva matriu jacobiana $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}$.

c) Els centres instantanis de rotació I_{RQ} i I_{TR} de les bieles RQ i TR respecte el terra.

d) Els valors de totes les coordenades generalitzades en els punts morts $x_{\max}$ i $x_{\min}$ de la coordenada x.

e) La relació de velocitats $\dot{\varphi}_3 / \dot{\varphi}_1$ en les configuracions de punt mort de la coordenada x.

Exercici 2 [5 punts]

$z_1 = 48$
$z_2 = 112$
$z_3 = 40$
$z_4 = 120$
$z_5 = 32$
$z_6 = 128$
$z_7 = 56$
$z_8 = 32$
$z_9 = 20$
$z_{10} = 20$
$z_{11} = 24$
$z_{12} = 24$

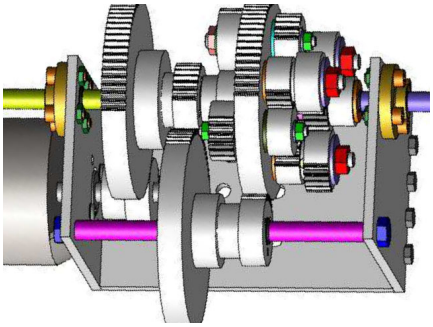


Figura (a)

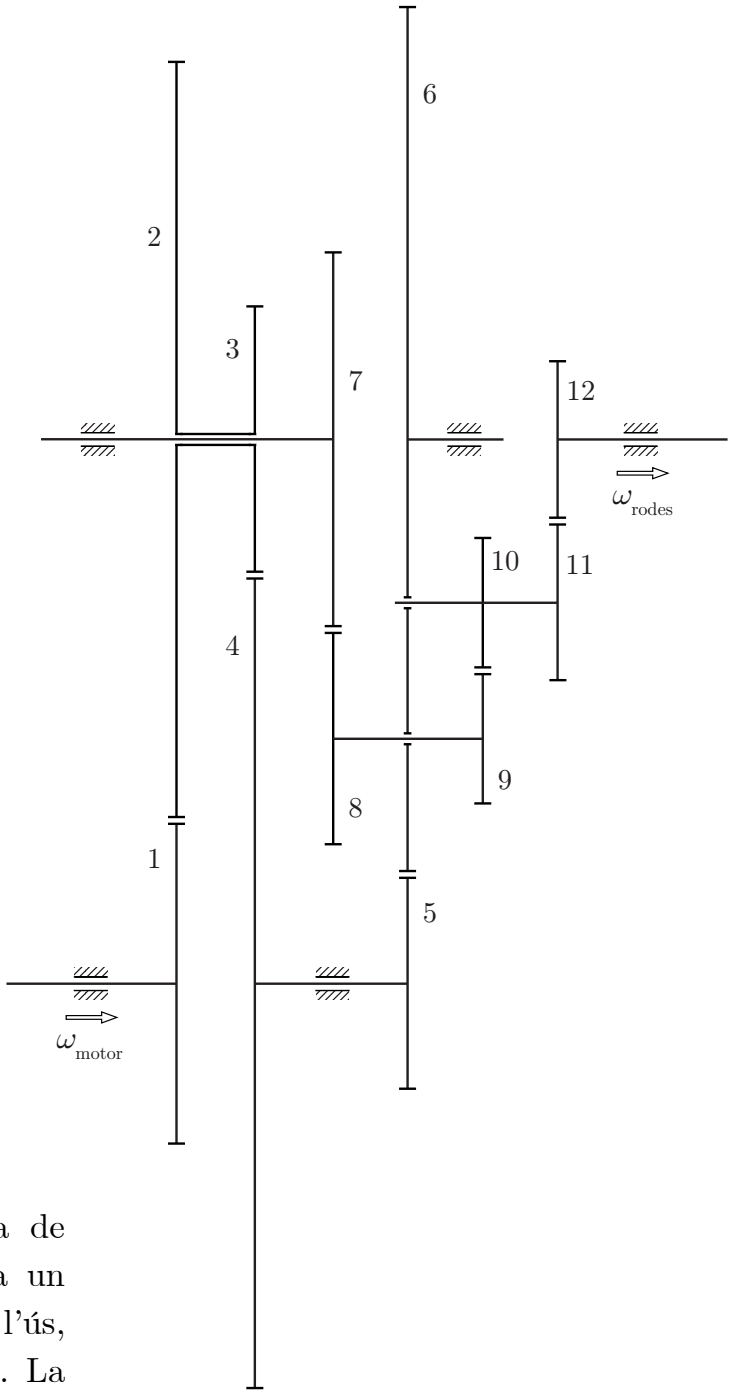


Figura (b)

La figura (a) mostra una proposta de tren d'engranatges per incorporar a un carretó de la compra per facilitar-ne l'ús, mitjançat un motor, en les pujades. La figura (b) mostra un esquema simplificat de la proposta.

El tren d'engranatges és una combinació d'un reductor d'eixos fixos i d'un tren epicicloidal.

a) Determineu el nombre de graus de llibertat del tren d'engranatges. Justifiqueu la vostra resposta.

b) Identifiqueu els elements del reductor d'eixos fixos i els elements del tren epicicloidal.

c) Establiu les equacions d'enllaç cinemàtiques entre les velocitats angulars $\boldsymbol{u} = \{\omega_{\text{motor}}, \omega_6, \omega_7, \omega_{\text{rodes}}\}^{\text{T}}$.

d) Determineu la relació de transmissió $\tau = \omega_{\text{rodes}}/\omega_{\text{motor}}$ quan $\omega_7 = 0$.

Solució – Exercici 1

a) Si s'atura la rotació de la barra O_1P el punt P queda aturat i es forma un triangle indeformable O_1PQ. En conseqüència, el punt R també queda aturat i la barra RT no es mou. Amb això, la corredora O_2 tampoc no pot girar. Per tant, el mecanisme té 1 grau de llibertat ja que aturant una única velocitat queda en repòs.

També es pot considerar que el mecanisme està format per un pistó biela manovella -corredora Q, barra PQ i barra O_1P– més un grup d'Assur –barra RT i corredora O_2.

Si s'aplica el criteri de superposició de restriccions del moviment (criteri de Grübler–Kutzbach) dona un número igual a 1.

$$5(\text{sòlids mòbils})\times 3 - 5(\text{articulacions})\times 2 - 2(\text{p. prismàtics})\times 2 = 1.$$

El mecanisme no presenta redundàncies totals ja que coincideixen el nombre de graus de llibertat i el número de Grübler–Kutzbach.

b) Com que s'empren 5 coordenades generalitzades i només n'hi ha una d'independent, cal determinar 4 equacions d'enllaç geomètriques que es poden obtenir, per exemple, imposant el tancament dels anells O_1PQ i $O_1PRO_2O_1$.

$$\begin{cases} l_1\cos\varphi_1 - l_3\cos\varphi_3 - x = 0 \\ l_1\sin\varphi_1 - l_3\sin\varphi_3 = 0 \\ l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_3 - s\cos\varphi_2 + d = 0 \\ l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_3 - s\sin\varphi_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{q}\right) = 0$$

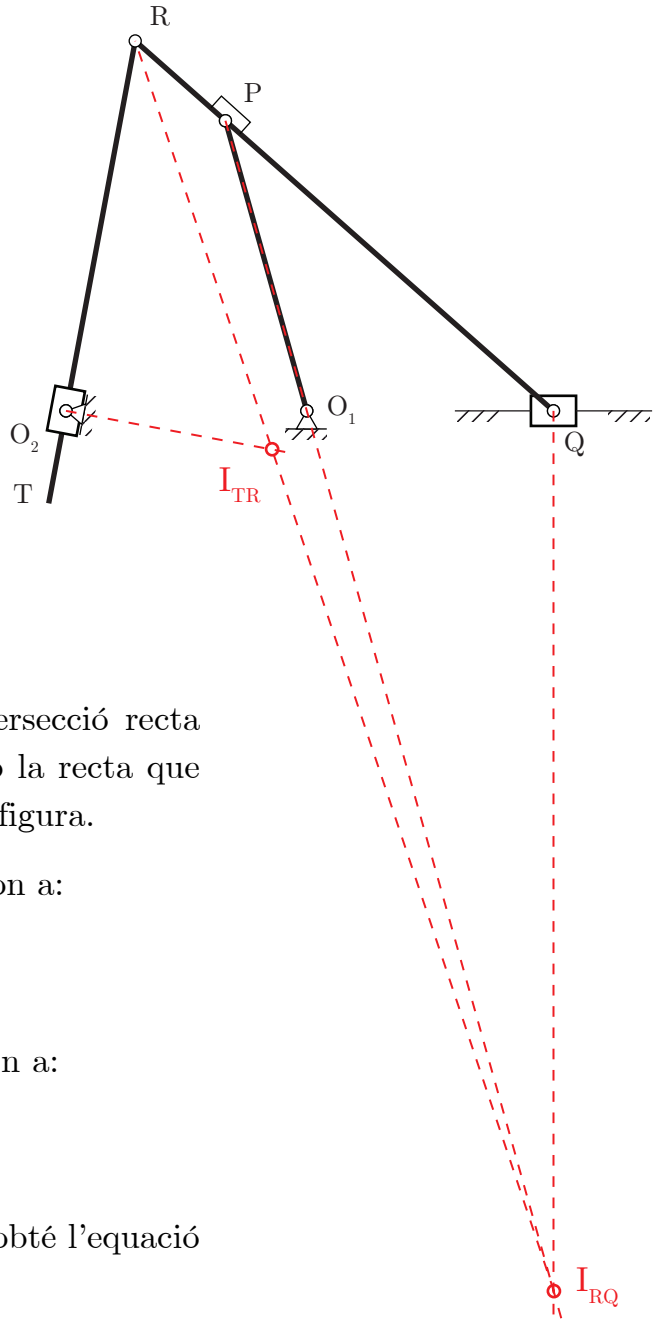
La matriu jacobiana s'obté derivant les equacions d'enllaç geomètriques respecte a les coordenades generalitzades.

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{pmatrix} -l_1\sin\varphi_1 & 0 & l_3\sin\varphi_3 & -1 & 0 \\ l_1\cos\varphi_1 & 0 & -l_3\cos\varphi_3 & 0 & 0 \\ -l_1\sin\varphi_1 & s\sin\varphi_2 & -l_2\sin\varphi_3 & 0 & -\cos\varphi_2 \\ l_1\cos\varphi_1 & -s\cos\varphi_2 & l_2\cos\varphi_3 & 0 & -\sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$

c) El centre instantani de rotació de la biela RQ –I_{RQ}– es pot determinar sabent que el punt P té velocitat perpendicular a la recta O_1P i la corredora Q té velocitat horitzontal.

Així doncs, el centre instantani de rotació I_{RQ} de la biela RQ es troba a la intersecció de la prolongació de la recta O_1P amb la recta vertical que passa per Q, tal com mostra la figura.

El centre instantani de rotació de la biela TR es pot determinar sabent que el punt O_2 és el centre instantani de rotació de la corredora O_2 respecte al terra i que la biela TR llisca respecte la corredora. Per tant, el punt I_{TR} s'ha de trobar sobre la recta perpendicular a TR que passa per O_2. El teorema dels tres centres aplicat a la terna de sòlids terra –0–, biela TR –1– i biela RPQ –2– indica que el centre instantani de rotació I_{TR} de la biela TR respecte el terra es troba sobre la recta que uneix els punts I_{RQ} i R.



Així doncs, el punt I_{TR} es troba a la intersecció recta perpendicular a TR que passa per O_2 amb la recta que uneix els punts I_{RQ} i R, tal com mostra la figura.

d) La configuració de punt mort $x_{\max}$ correspon a:

$$\boldsymbol{q} = \left\{0,\, 0,\, 180^{\circ},\, 130\,\text{mm},\, 70\,\text{mm}\right\}^{\mathrm{T}}$$

La configuració de punt mort $x_{\min}$ correspon a:

$$\boldsymbol{q} = \left\{180^{\circ},\, 180^{\circ},\, 180^{\circ},\, 30\,\text{mm},\, 30\,\text{mm}\right\}^{\mathrm{T}}$$

e) De la segona fila de la matriu jacobiana, s'obté l'equació que relaciona les velocitats $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_3$:

$$l_1 \cos\varphi_1\, \dot{\varphi}_1 - l_3 \cos\varphi_3\, \dot{\varphi}_3 = 0$$

En la configuració $x_{\max}$ es té: $\dfrac{\dot{\varphi}_3}{\dot{\varphi}_1} = -\dfrac{l_1}{l_3} = -0,625.$

En la configuració $x_{\min}$ es té: $\dfrac{\dot{\varphi}_3}{\dot{\varphi}_1} = \dfrac{l_1}{l_3} = 0,625.$

Solució – Exercici 2

a) El tren d'engranatges té 2 graus de llibertat. Cal aturar dues velocitats angulars per anul·lar el moviment: si s'atura la rotació del motor, $\omega_{\text{motor}} = 0$, també s'atura la rotació de la roda 6, però les rodes 7, 8, 9, 10, 11 i 12 poden continuar girant. Si s'atura la rotació de la roda 7, $\omega_7 = 0$, s'aturen totes les rotacions.

b) Els elements del reductor d'eixos fixos són les rodes 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Correspon a un reductor de 3 etapes en el qual les rodes 2 i 3 són solidàries i les rodes 4 i 5 també.

Els elements del tren epicicloidal simple que giren entorn de l'eix fix són les rodes 6, 7 i 12. La roda 6 fa de braç entorn del qual giren el conjunt de satèl·lits 8–9 i 10–11.

c) Si en el tren d'eixos fixos es pren la roda 1 com a entrada i la roda 6 com a sortida es pot escriure l'equació cinemàtica d'enllaç:

$$\tau_1 = \frac{\omega_6}{\omega_1} = -\frac{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5}{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6} = -\frac{1}{28} = -0{,}0357 \quad \rightarrow \quad \tau_1\,\omega_1 - \omega_6 = 0.$$

Si per al tren epicicloidal es pren la roda 7 com a entrada i la roda 12 com a sortida es pot escriure l'equació cinemàtica d'enllaç:

$$\tau_2 = \frac{\omega_{12/\text{b}}}{\omega_{7/\text{b}}} = \frac{\omega_{12} - \omega_6}{\omega_7 - \omega_6} \quad \rightarrow \quad \tau_2\,\omega_7 + \left(1 - \tau_2\right)\omega_6 - \omega_{12} = 0$$

$$\text{amb} \quad \tau_2 = \left(\pm\right)\frac{\prod z_{\text{conductores}}}{\prod z_{\text{conduides}}} = -\frac{z_7 \cdot z_9 \cdot z_{11}}{z_8 \cdot z_{10} \cdot z_{12}} = -\frac{7}{4} = -1{,}75.$$

d) El motor acciona la rotació de la roda 1 i l'eix de les rodes coincideix amb l'eix de la roda 12.

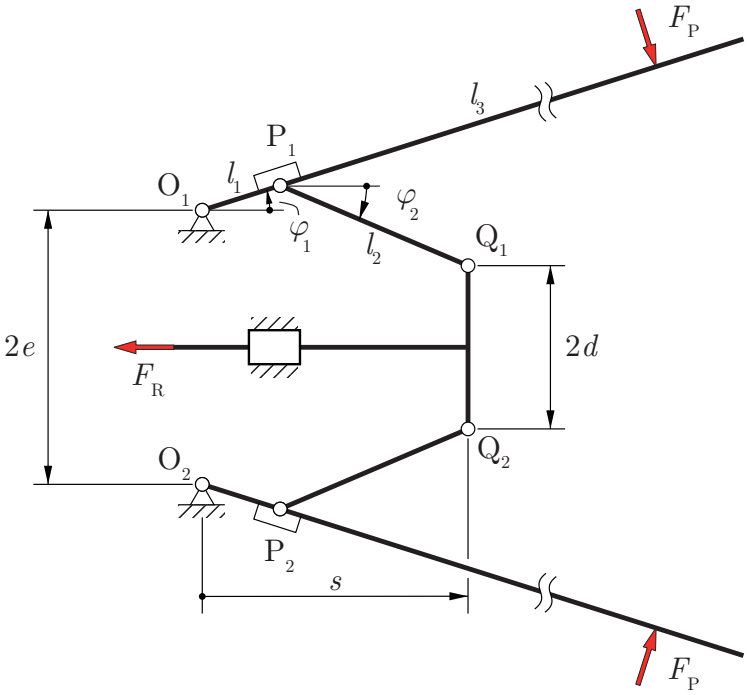
De les equacions anteriors es té:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1\,\omega_{\text{motor}} - \omega_6 = 0 \\ \tau_2\,\omega_7 + \left(1 - \tau_2\right)\omega_6 - \omega_{\text{rodes}} = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \tau_2\,\omega_7 + \left(1 - \tau_2\right)\tau_1\,\omega_{\text{motor}} - \omega_{\text{rodes}} = 0$$

Per tant, la relació de transmissió $\tau = \omega_{\text{rodes}}/\omega_{\text{motor}} = (1 - \tau_2)\,\tau_1 = -98{,}21 \cdot 10^{-3}$.

- Contingut del sobre: enunciat, 4 fulls quadriculats i 3 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar l'examen es disposa de **tres hores**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

Exercici 1 [3,25 punts]



$l_1 = 12$ mm
$l_2 = 30$ mm
$l_3 = 180$ mm
$e = 20$ mm
$d = 12$ mm

La figura mostra la fotografia i l'esquema de símbols d'una rebladora manual de dos braços.

Per a la seva anàlisi cinemàtica i dinàmica, s'utilitza el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, s\}^{\mathrm{T}}$.

El moviment de la rebladora està limitat a $5^{\circ} \leq \varphi_1 \leq 45^{\circ}$. Determineu:

a) Les equacions d'enllaç geomètriques entre les coordenades generalitzades i la seva matriu jacobiana $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}$.

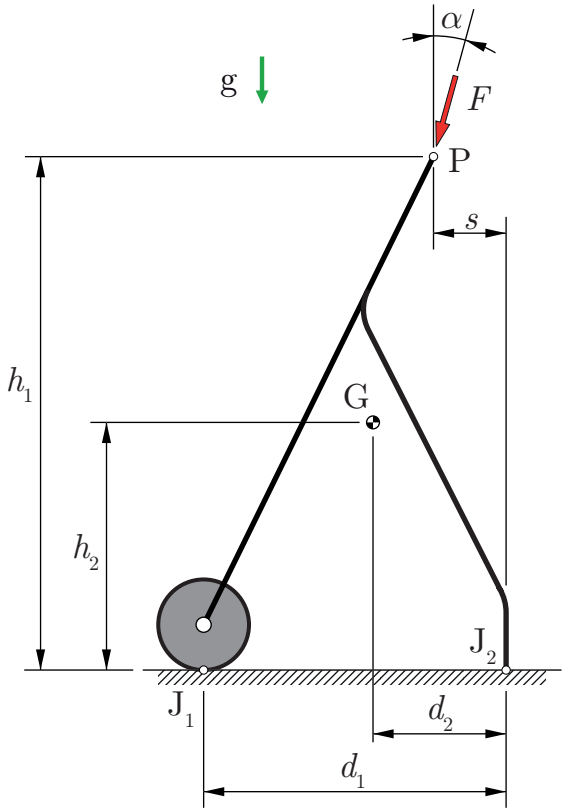
b) El centre instantani de rotació, I, de la biela P_1Q_1 respecte al terra.

Quan s'utilitza l'eina, per reblonar dues peces entre si, la corredora Q_1Q_2 rep del rebló una força F_R. Determineu:

c) L'expressió de la força F_P perpendicular a cada braç de la rebladora que fa la persona que l'utilitza. Especifiqueu clarament les hipòtesis que realitzeu.

d) L'expressió de la força F_{PQ} a la qual estan sotmeses les barres P_1Q_1 i P_2Q_2 en funció de F_R. Especifiqueu si les barres estan sotmeses a tracció o a compressió.

Exercici 2 [3,25 punts]



$h_1 = 900$ mm
$h_2 = 435$ mm
$d_1 = 450$ mm
$d_2 = 200$ mm
$s = 120$ mm
$m = 4$ kg
$F = 140$ N
$\alpha = 10^{\circ}$
$\mu = 0{,}6$

Els caminadors són aparells que ajuden a desplaçar-se a les persones amb capacitat de moviment reduïda.

La figura mostra la fotografia d'un model de caminador, de massa m, que té rodes que poden girar lliurement a les potes del davant i tacs de goma, amb frec important amb el terra, a les potes del darrere. Per al seu estudi s'utilitza l'esquema pla de la figura.

Es suposa que la persona que utilitza el caminador, en agafar-se als mànecs, realitza una força F, en el punt P, inclinada un angle α respecte la vertical. Suposant el caminador quiet i que la persona hi és recolzada:

a) Dibuixeu el diagrama de cos lliure del caminador. Justifiqueu clarament les hipòtesis realitzades que us han portat al vostre diagrama.

Determineu:

b) El valor de les forces d'enllaç en els punts de contacte J_1 i J_2.

c) El coeficient de frec mínim, $\mu_{\min}$, a J_2 que garanteix que el caminador no es mou quan actua la força F.

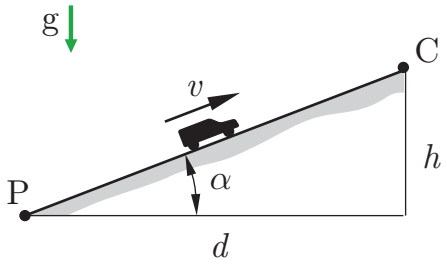
Amb el coeficient de frec indicat, determineu:

d) El valor de l'angle màxim, $\alpha_{\max}$, per al qual el caminador està quiet per gran que sigui F.

e) El valor de la força mínima, $F_{\min}$, per fer avançar el caminador si $\alpha = 90^{\circ}$.

Segueix al darrere →

Exercici 3 **[3,5 punts]**



$d = 10$ km
$h = 500$ m
$v = 80$ km/h

Un/a estudiant d'enginyeria, en el seu TFG, es proposa un repte polèmic: comparar el comportament d'un vehicle de combustió (A) i d'un vehicle híbrid (B), quan funciona en mode de combustió, mentre circulen per una pujada a velocitat v constant.

Les resistències passives degudes al rodolament i a l'aerodinàmica reduïdes a la velocitat d'avanç són iguals per als dos tipus de vehicle i són equivalents a:

$$F_{\text{rod}} = c_{\text{rod}}\ m\ g \qquad\qquad F_{\text{aero}} = c_{\text{aero}}\ v^2$$

Les característiques dels dos vehicles de la mateixa marca comercial són:

	Vehicle A	Vehicle B
Massa m [kg]	1250	1320
Massa reduïda a la velocitat d'avanç m_{red} [kg]	1450	1520
Coeficient de rodolament c_{rod}	0,01	0,01
Coeficient aerodinàmic c_{aero} [N/(m/s)^2]	0,34	0,34
Consum específic c_{esp} [kg combustible/(kW·h)]	0,0845	0,0828
Producció CO2 p_{CO2} [kg CO2/kg combustible]	3,11	3,26
Potència màxima del motor [kW]	74	69
η_{trans}	0,85	0,85

Ajudeu l'estudiant, i determineu quan els vehicles van de P a C a velocitat constant $v = 80$ km/h:

a) La potència que ha de proporcionar el motor si es circula amb el vehicle A, P_{motA}, i si es circula amb el vehicle B, P_{motB}.

b) L'energia subministrada pel motor en els dos casos, E_{motA} i E_{motB}.

c) La quantitat de CO2, en kg, produïda en els dos casos, m_{CO2A} i m_{CO2B}.

d) Raoneu perquè la massa reduïda a la velocitat d'avanç m_{red} és més gran que la massa m.

Si el motor proporciona la màxima potència i el vehicle circula $v = 80$ km/h determineu:

e) L'acceleració que té el vehicle A, a_{A}, i el vehicle B, a_{B}, per anar de P a C.

Solució Exercici 1

a) El mecanisme té un grau de llibertat. Per tant, calen 2 equacions geomètriques d'enllaç que es poden trobar, per exemple, imposant la condició de tancament de l'anell $O_1P_1Q_1O_1$.

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 - s = 0 \\ l_1 \sin\varphi_1 - l_2 \sin\varphi_2 - d + e = 0 \end{cases}$$

La matriu jacobiana és en aquest cas:

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\varphi_1 & -l_2 \sin\varphi_2 & -1 \\ l_1 \cos\varphi_1 & -l_2 \cos\varphi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) El centre instantani de rotació I de la biela P_1Q_1 es pot determinar a partir de les velocitats dels punts P_1 i Q_1.

La velocitat de P_1 és perpendicular a la recta O_1P_1. Per tant, el centre instantani I es troba sobre aquesta recta.

La velocitat de Q_1 és horitzontal. Per tant, el centre instantani I es troba sobre la recta vertical que passa per Q_1.

Així doncs, el centre instantani de rotació I es troba en la intersecció de la recta O_1P_1 i la recta vertical que passa per Q_1.

c) Se suposa que les barres són de massa i inèrcia neglibigles i que les friccions en els enllaços també ho són, D'aquesta manera, es pot determinar la força que ha de fer la persona F_{P} a causa únicament de la força que l'eina rep del rebló F_{R}.

Per determinar F_{P}, es proposa emprar el mètode de les Potències Virtuals prenent com sistema tot el mecanisme i realitzar un moviment virtual compatible amb els enllaços per tal que no apareguin les forces d'enllaç en l'expressió de les potències virtuals.

$$\sum_{\text{sistema}} P^* = 0 \;\rightarrow\; -F_{\mathrm{R}}\, \dot{s}^* - 2\, F_{\mathrm{P}} \left(l_1 + l_3\right) \dot{\varphi}_1^* = 0.$$

La relació entre $\dot{s}^*$ i $\dot{\varphi}_1^*$ es pot obtenir operant amb les equacions cinemàtiques d'enllaç:

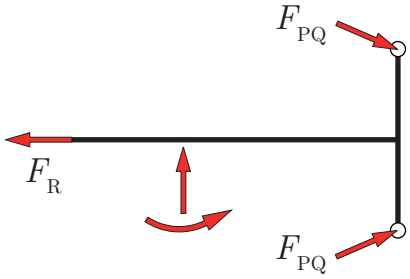
$$\dot{s}^* = -l_1\, \dot{\varphi}_1^* \frac{\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}{\cos\varphi_2}.$$

Alternativament, es pot obtenir a partir de l'expressió de l'anàlisi de velocitats:

$$\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{d}} = -\left(\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{d}}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{i}}\, \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{i}} + \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{t}}\right)$$

Així doncs: $F_{\mathrm{P}} = \dfrac{F_{\mathrm{R}}}{2}\dfrac{l_1}{l_1+l_3}\dfrac{\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)}{\cos\varphi_2}$.

d) Amb la consideració que les barres són d'inèrcia negligible es pot assegurar que la força F_{PQ} a la qual estan sotmeses les barres $\mathrm{P_1Q_1}$ i $\mathrm{P_2Q_2}$ té la direcció de les barres.

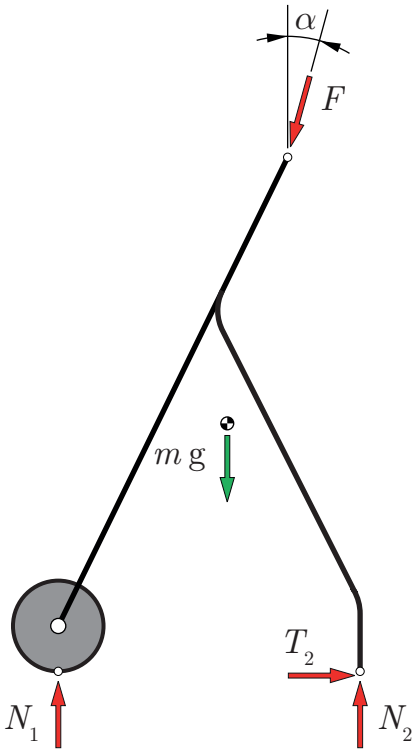


A partir del diagrama de sòlid lliure mostrat a la figura, l'aplicació del teorema de la quantitat de moviment, en direcció horitzontal, permet escriure:

$$-F_{\mathrm{R}} + 2\,F_{\mathrm{PQ}}\cos\varphi_2 = 0 \quad\rightarrow\quad F_{\mathrm{PQ}} = \frac{F_{\mathrm{R}}}{2\cos\varphi_2}.$$

Dins del marge de funcionament aquesta força sempre és positiva. Per tant, les barres $\mathrm{P_1Q_1}$ i $\mathrm{P_2Q_2}$ estan sotmeses a compressió.

Solució Exercici 2



a) Si es considera que la roda és d'inèrcia negligible l'aplicació del teorema del moment cinètic a la roda en el centre mostra que la força tangencial a $\mathrm{J_1}$ és nul·la. Si el caminador està quiet la força tangencial a $\mathrm{J_2}$ és d'enllaç perquè no llisca. Per tant, el diagrama de cos lliure del caminador és el mostrat a la figura.

b) L'aplicació del teorema de la quantitat de moviment al caminador porta a:

$$\sum_{\text{caminador}} \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = 0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} -F\sin\alpha + T_2 = 0 \\ N_1 + N_2 - F\cos\alpha - m\,\mathrm{g} = 0 \end{cases}$$

L'aplicació del teorema del moment cinètic al punt $\mathrm{J_2}$ porta a:

$$\sum_{\text{caminador}} \boldsymbol{M}_{\text{ext}}(\mathrm{J_2}) = 0$$

$$N_1\,d_1 - m\,\mathrm{g}\,d_2 - F\left(s\cos\alpha + h_1\sin\alpha\right) = 0$$

A partir d'aquestes expressions s'arriba a:

$$T_2 = F\sin\alpha$$

$$N_1 = m\,\mathrm{g}\,\frac{d_2}{d_1} + F\,\frac{s\cos\alpha + h_1\sin\alpha}{d_1} \qquad N_2 = m\,\mathrm{g}\,\frac{d_1-d_2}{d_1} + F\left(\cos\alpha - \frac{s\cos\alpha + h_1\sin\alpha}{d_1}\right)$$

Amb els valors numèrics de l'enunciat: $T_2 = 24{,}31$ N, $N_1 = 102{,}8$ N i $N_2 = 74{,}28$ N.

c) En condicions de lliscament imminent $T_2 = \mu_{\min} N_2$, per tant:

$$\mu_{\min} = \frac{T_2}{N_2} = \frac{F\, d_1 \sin\alpha}{m\,\mathrm{g}\left(d_1 - d_2\right) + F\left(d_1 \cos\alpha - s\cos\alpha - h_1 \sin\alpha\right)} = 0,3273.$$

d) Es tracta d'una situació de falcament i per tant el pes és negligible. L'angle $\alpha_{\max}$ es pot determinar, per exemple, a partir de l'expressió del coeficient de frec trobat a l'apartat anterior, negligint el pes.

$$\mu = \frac{d_1 \sin\alpha_{\max}}{d_1 \cos\alpha_{\max} - s\cos\alpha_{\max} - h_1 \sin\alpha_{\max}} \;\rightarrow\; \alpha_{\max} = \arctan\frac{\mu\left(d_1 - s\right)}{d_1 + \mu\, h_1} = 11,31^{\circ}.$$

e) A partir de les expressions trobades a l'apartat *b*), imposant que $\alpha = 90^{\circ}$ i que al punt J_2 hi ha lliscament, s'obté:

$$F = \mu\, m\,\mathrm{g}\,\frac{d_1 - d_2}{d_1 + \mu\, h_1} = 5,944 \text{ N}.$$

Solució Exercici 3

a) La potència que ha de proporcionar el motor per anar de P a C es pot determinar a partir de l'aplicació del principi de conservació de l'energia al sistema format per tot el vehicle menys el motor:

$$P_{\text{sub}} = P_{\text{cedida}} + P_{\text{acumulada}} \;\rightarrow\; P_{\text{mot}} = P_{\text{rp trans}} + P_{\text{rp rod}} + P_{\text{rp aero}} + \dot{E}_{\text{p}}$$

$$P_{\text{mot}} = \frac{v}{\eta_{\text{trans}}}\left(F_{\text{rod}} + F_{\text{aero}} + m\mathrm{g}\sin\alpha\right)$$

Substituint valors s'obté: $P_{\text{motA}} = 23{,}60$ kW i $P_{\text{motB}} = 24{,}67$ kW.

b) L'energia subministrada pel motor s'obté multiplicant la potència subministrada pel temps necessari per fer el trajecte.

$$E_{\text{mot}} = P_{\text{mot}} \cdot t_{\text{pujada}} = P_{\text{mot}} \cdot \frac{d}{v\cos\alpha}$$

Per al vehicle A: $E_{\text{motA}} = 10{,}63$ MJ $= 2{,}954$ kW·h.

Per al vehicle B: $E_{\text{motB}} = 11{,}12$ MJ $= 3{,}088$ kW·h.

c) La quantitat de CO2 produïda s'obté com: $m_{\text{CO2}} = E_{\text{mot}} \cdot c_{\text{esp}} \cdot p_{\text{CO2}}$. Per tant:

$m_{\text{CO2A}} = 0{,}7762$ kg i $m_{\text{CO2B}} = 0{,}8336$ kg.

d) La massa reduïda del vehicle a la velocitat d'avanç inclou la massa del vehicle m i la

inèrcia de tots els elements rotatoris reduïda a la velocitat v d'avanç. Per tant, és lògic que $m_{\text{red}} > m$.

e) L'acceleració que té el vehicle es pot determinar a partir de l'aplicació del principi de conservació de l'energia al sistema format per tot el vehicle menys el motor. En aquest cas:

$$P_{\text{sub}} = P_{\text{cedida}} + P_{\text{acumulada}} \quad \rightarrow \quad P_{\text{mot}} = P_{\text{rp trans}} + P_{\text{rp rod}} + P_{\text{rp aero}} + \dot{E}_{\text{p}} + \dot{E}_{\text{c}}$$

$$P_{\text{max}}\,\eta_{\text{trans}} = F_{\text{rod}} v + F_{\text{aero}} v + mgv \sin\alpha + m_{\text{red}} v\, a_{\text{max}}$$

$$a = \frac{1}{m_{\text{red}}}\left(\frac{P_{\text{max}}\,\eta_{\text{trans}}}{v} - F_{\text{rod}} - F_{\text{aero}} - mg\sin\alpha\right)$$

Per al vehicle A: $a_{\text{A}} = 1{,}330$ m/s^2.

Per al vehicle B: $a_{\text{B}} = 1{,}115$ m/s^2.