



Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Teoria de Màquines i Mecanismes

Grau d'irregularitat

Màquines rotatives

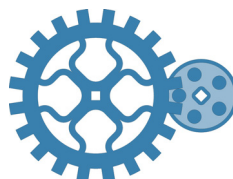
Volants d'inèrcia

Salvador Cardona

Lluïsa Jordi

Enrique Zayas

2015



Departament d'Enginyeria Mecànica

GRAU D'IRREGULARITAT. MÀQUINES ROTATIVES

VOLANTS D'INÈRCIA.

INTRODUCCIÓ

En una màquina sovint es distingeixen 3 elements, figura 1: el motor, la transmissió i el receptor que formen una cadena cinemàtica d'un grau de llibertat.



Figura 1. Cadena cinemàtica usual d'una màquina.

El motor agafa energia de l'exterior, una part la converteix en l'energia mecànica que fa moure la màquina i la restant no es pot convertir en mecànica a causa dels fenòmens que intervenen en la conversió –rendiment del motor. La transmissió facilita la disposició relativa entre el motor i el receptor, adequa les característiques cinemàtiques del motor a les del receptor –relació de transmissió– i li transmet l'energia mecànica introduïda pel motor una part de la qual, en general petita, no li arriba a causa de les resistències passives de la transmissió –rendiment de la transmissió. El receptor realitza la tasca que té encomanada la màquina utilitzant l'energia mecànica que li arriba de la transmissió i que retorna a l'exterior en forma d'energia dissipada en les resistències passives del receptor i d'energia introduïda als productes que manipula.

A vegades, la inèrcia de la cadena cinemàtica no és suficient per obtenir el comportament dinàmic desitjat de la màquina i cal afegir-li un volant d'inèrcia –sòlid amb la part perifèrica i central de revolució que gira al voltant del seu eix– convenientment muntat i equilibrat per tal que el seu efecte dinàmic sigui únicament causat per l'augment d'inèrcia de la cadena, figura 2. Això s'aconsegueix fent que el centre d'inèrcia del volant estigui sobre un eix de rotació fix i que la direcció principal d'inèrcia de major moment d'inèrcia del volant coincideixi amb la de l'eix de rotació –volant equilibrat estàticament i dinàmicament.

El volant es pot incorporar, segons les necessitats, a l'eix del motor, a l'eix del receptor o fins i tot a un altre eix cinemàticament unit a un d'ells



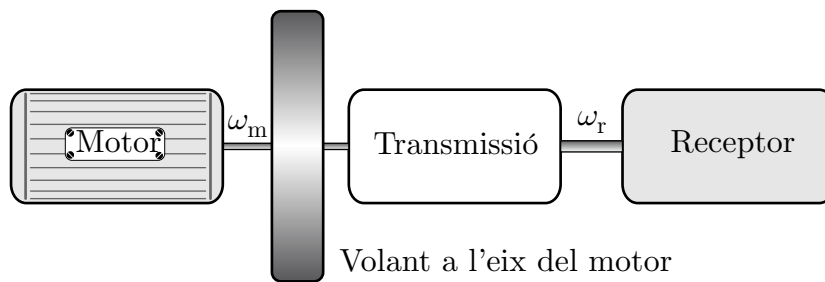


Figura 2. Cadena cinemàtica d'una màquina amb volant.

La introducció d'un volant en una cadena cinemàtica pot tenir, en principi, els següents objectius i efectes:

- Regularitzar les velocitats, forces i parells de la màquina. L'augment d'inèrcia de la cadena sense modificar parells o forces exteriors disminueix les acceleracions.
- Disposar d'una certa capacitat per emmagatzemar energia ja sigui a curt o llarg termini.
- Modificar el comportament vibratori de la cadena, causat per la presència d'inèrcies i d'elements elàstics. L'estudi del comportament vibratori és propi de l'àmbit de les vibracions mecàniques i no es contempla en aquesta monografia.

RÈGIMS DE FUNCIONAMENT DE LES MÀQUINES

El règim de funcionament d'una màquina fa referència a les seves condicions de funcionament. Així, per exemple, si es fa atenció a la capacitat de treball d'una màquina, aquesta pot treballar a règim de plena càrrega, de mitja càrrega, etc. És usual referir-se al règim de funcionament fent atenció a la variació del moviment de la màquina en funció del temps durant un període d'observació.

Es distingeix entre règim **permanent** o **intermitent** segons si la màquina funciona constantment o no durant el període d'observació.

Si el règim és permanent es diu que és **estacionari**, des del punt de vista mecànic, si les velocitats o les seves propietats estadístiques –mitjana, desviació estàndard– no varien al llarg del temps. En cas contrari, es diu que és **transitori**. De manera relaxada, el règim és estacionari quan la velocitat es manté sensiblement constant durant el temps d'observació. L'estacionarietat mecànica no implica l'estacionarietat d'altres fenòmens; així, una màquina en règim estacionari des del punt de vista mecànic pot anar augmentant de temperatura i per tant estar en



règim transitori des del punt de vista tèrmic. En règim estacionari, es considera que la derivada temporal de l'energia interna del sistema és nul·la, $\dot{E}_{\text{interna}} \approx 0$.

Un règim és **cíclic** si les variables d'estat –posicions i velocitats– de la màquina es repeteixen periòdicament i per tant es pot identificar un cicle en el seu funcionament. Cal tenir en compte també que la periodicitat mecànica no implica necessàriament la d'altres fenòmens; per exemple, l'augment de temperatura d'un motor que gira a velocitat sensiblement constant. Dins d'un cicle, les velocitats poden tenir variacions molt importants de manera que amb períodes d'observació no superiors al cicle el règim podria ser qualificat de transitori. En aquest cas, l'estacionarietat del règim s'estableix trobant la mitjana de la velocitat, i s'escau altres propietats estadístiques, utilitzant un nombre enter de cicles o en tot cas prenent un temps que inclogui un nombre elevat de cicles. En règim cíclic, la variació d'energia interna en un cicle és nul·la, $\Delta E_{\text{interna}} \Big|_{\text{cicle}} = 0$.

Sovint es considera que una màquina té un règim determinat en funció de l'estudi que se'n vol fer i del temps d'observació. Així, per exemple, el funcionament d'un tren de ferrocarril metropolità al llarg del dia es pot qualificar d'intermitent ja que el servei no funciona les 24 h del dia. Durant les hores de servei diari, fa el mateix recorregut un cert nombre de vegades per tant podria ser qualificat de cíclic. Entre estació i estació fàcilment es distingirà l'estudi d'un règim transitori d'arrencada, un règim estacionari de velocitat sensiblement constant i d'un règim transitori de frenada.

GRAU D'IRREGULARITAT

El grau d'irregularitat δ del règim estacionari és un paràmetre que quantifica la variació de la velocitat entorn del seu valor mitjà. Per a una cadena cinemàtica com la de la figura 1 es pot definir com

$$\delta = \frac{\sigma_{\omega}}{\mu_{\omega}} \quad \text{on } \mu_{\omega} \text{ és la mitjana i } \sigma_{\omega} \text{ la desviació estàndard d'}\omega.$$

En els estudis clàssics de màquines rotatives amb funcionament cíclic el grau d'irregularitat es defineix com

$$\delta = \frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{\omega_{\text{mitjana}}}$$



on $\omega_{\text{mitjana}} = 2\pi n$, essent n la velocitat de rotació de l'eix principal de la màquina, i ω_{max} i ω_{min} les velocitats angulars màxima i mínima d'aquest eix.

La irregularitat del règim estacionari de les màquines rotatives pot aparèixer per la variació al llarg d'un cicle de:

- El parell motor T_{mot} . Parell, a l'eix de sortida de l'element motor, que aquest fa sobre la resta de la cadena cinemàtica. El parell motor és variable al llarg d'un cicle, per exemple, si el motor és un motor alternatiu de combustió interna. Si bé aquesta definició és suficient en molts casos, en altres és millor definir-lo com el parell que aplicat a l'eix de sortida del motor donaria la mateixa potència que totes les forces que actuen sobre els elements mòbils del motor –parell reduït d'aquestes forces a la rotació de l'eix del motor. Ambdues definicions coincideixen si el règim és estacionari i la inèrcia reduïda dels elements interns del motor és constant.
- El parell resistent del receptor T_{rec} . Parell, a l'eix d'entrada de l'element receptor, que aquest rep de la resta de la cadena cinemàtica. El parell resistent és variable al llarg d'un cicle en moltes ocasions, per exemple, si el receptor és la part mòbil d'una premsa. Igual que en el cas del parell motor, és convenient definir el parell resistent com aquell que aplicat a l'eix d'entrada del receptor donaria la mateixa potència, canviada de signe, que totes les forces que actuen sobre els elements mòbils del receptor –parell reduït d'aquestes forces a la rotació de l'eix del receptor, canviat de signe. De nou, ambdues definicions coincideixen si el règim és estacionari i la inèrcia reduïda dels elements interns del receptor és constant.
- La inèrcia reduïda de la cadena cinemàtica I_{red} . La inèrcia de la cadena cinemàtica d'una màquina reduïda a un dels seus eixos només és constant a llarg d'un cicle si tots els seus elements d'inèrcia no negligible giren al voltant d'eixos amb relacions de transmissió constants. La inèrcia reduïda és variable en els compressors alternatius, en les premses d'excèntrica, etc.

A la taula adjunta es mostren alguns graus d'irregularitat trobats a la bibliografia. (I. I. Artobolevski. Théorie des Mécanismes et des Machines.)



	δ
Bombes	0,2 – 0,03
Maquinària agrícola	0,2 – 0,02
Maquinària per treballar metalls	0,05 – 0,02
Maquinària tèxtil, d'impressió, molins	0,1 – 0,02
Motors marins	0,05 – 0,01
Motors d'explosió	0,0125 – 0,006
Compressors	0,02 – 0,01
Generadors de corrent continu	0,01 – 0,005
Generadors de corrent altern	0,005 – 0,003
Motors d'aviació	< 0,005
Turbogeneradors	<0,005

EQUACIÓ DEL MOVIMENT D'UNA MÀQUINA ROTATIVA

Si una màquina es pot descriure utilitzant l'esquema de la figura 1, situació força usual, es pot estudiar com un sistema mecànic d'un grau de llibertat. En un sistema d'un grau de llibertat, si les forces que hi actuen diferents de les d'enllaç no són funció d'aquestes (el cas més usual de forces diferents de les d'enllaç que depenen de forces d'enllaç es dona quan es descriuen les resistències passives amb el model de frec sec), l'equació del moviment es pot determinar fent ús exclusivament del Teorema de l'Energia, o del Principi de Conservació de l'Energia, en versió diferencial. En aquesta situació s'utilitza la inèrcia reduïda per descriure el comportament inercial de la cadena cinemàtica de la màquina i la força reduïda o el parell reduït per descriure les forces diferents de les d'enllaç, que en principi fan potència no nul·la.

Si per a una màquina rotativa es pren com a grau de llibertat la derivada temporal $\dot{\varphi} = \omega_{\text{mot}}$ de la coordenada angular φ de l'eix del motor, l'expressió de l'energia cinètica és



$E_c = \frac{1}{2} I_{\text{red}}(\varphi) \dot{\varphi}^2$ on $I_{\text{red}}(\varphi)$ és la inèrcia reduïda a la coordenada φ , o a la rotació de l'eix del motor. Aquesta inèrcia és, en principi, funció de la configuració, donada per l'angle φ . Aquest és, per exemple, el cas d'una màquina amb elements amb moviment alternatiu, que no aporten energia cinètica en les configuracions corresponents als seus punts morts, en elles tenen velocitat nul·la, i sí n'aporten en les altres configuracions.

La potència P de totes les forces que actuen sobre el sistema és la suma de la potència de les forces que actuen sobre els elements mòbils del motor, del receptor i de la transmissió. Per a la transmissió, es defineix el parell T_{trans} com aquell que aplicat, per exemple, a l'eix d'entrada de la transmissió donaria la mateixa potència, canviada de signe, que totes les resistències passives que actuen sobre els elements de la transmissió –parell reduït d'aquestes forces a la rotació de l'eix del motor, canviat de signe.

$$P = P_{\text{mot}} + P_{\text{trans}} + P_{\text{rec}} = T_{\text{mot}} \dot{\varphi} - T_{\text{trans}} \dot{\varphi} - T_{\text{rec}} \dot{\varphi}_{\text{rec}} = \\ (T_{\text{mot}} - T_{\text{trans}} - T_{\text{rec}} \tau) \dot{\varphi} = T_{\text{red}}(\varphi, \dot{\varphi}) \dot{\varphi}$$

on $\tau = \omega_{\text{rec}}/\omega_{\text{mot}} = \dot{\varphi}_{\text{rec}}/\dot{\varphi}$ és la relació de transmissió i $T_{\text{red}}(\varphi, \dot{\varphi})$ és el parell reduït de totes les forces de la màquina a la coordenada φ , o a la rotació de l'eix del motor. Aquest parell és, en principi, funció de la configuració, donada per l'angle φ , i de la velocitat $\dot{\varphi}$. El parell reduït serà funció de la configuració si, per exemple, en la màquina hi ha elements elàstics que es deformen més o menys al llarg d'un cicle. El parell reduït serà funció de la velocitat si, per exemple, algunes resistències passives provenen de frec viscos.

Aplicant el Teorema de l'Energia en versió diferencial al sistema format per tota la màquina, i fent ús de la inèrcia reduïda i del parell reduït, s'obté l'equació del moviment.

$$\dot{E}_c = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_{\text{red}}(\varphi) \dot{\varphi}^2 \right) = \frac{1}{2} I_{\text{red} \varphi}(\varphi) \dot{\varphi}^3 + I_{\text{red}}(\varphi) \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \quad \text{amb} \quad I_{\text{red} \varphi}(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} (I_{\text{red}}(\varphi)) \\ P = T_{\text{red}}(\varphi, \dot{\varphi}) \dot{\varphi} \quad [1] \\ \dot{E}_c = P \quad \rightarrow \quad I_{\text{red} \varphi}(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{red}}(\varphi) \ddot{\varphi}^2 - T_{\text{red}}(\varphi, \dot{\varphi}) = 0$$

Si s'aplica el Principi de Conservació de l'Energia, també en versió diferencial, a tota la màquina excloent la part no mecànica del motor, per exemple, la part elèctrica si el motor és elèctric, s'obté evidentment la mateixa equació del moviment.



En el càlcul de la potència cedida, cal tenir en compte que és la potència de les forces que actuen sobre l'exterior i per tant de signe contrari a la de les forces que actuen sobre els elements mòbils de la màquina.

$$\begin{aligned}
 P_{\text{rebuda}} &= T_{\text{mot}} \dot{\varphi} & P_{\text{cedida}} &= T_{\text{trans}} \dot{\varphi} + T_{\text{rec}} \dot{\varphi} & \dot{E}_{\text{interna}} &= \dot{E}_c \\
 P_{\text{rebuda}} &= P_{\text{cedida}} + \dot{E}_{\text{interna}} & \rightarrow & T_{\text{mot}} \dot{\varphi} = T_{\text{trans}} \dot{\varphi} + T_{\text{rec}} \dot{\varphi}_{\text{rec}} + \dot{E}_c & \rightarrow & \\
 \dot{E}_c &= T_{\text{mot}} \dot{\varphi} - T_{\text{trans}} \dot{\varphi} - T_{\text{rec}} \dot{\varphi}_{\text{rec}} = (T_{\text{mot}} - T_{\text{trans}} - T_{\text{rec}} \tau) \dot{\varphi} = T_{\text{red}}(\varphi, \dot{\varphi}) \dot{\varphi} = P
 \end{aligned} \tag{2}$$

Si quan s'aplica el Principi de Conservació de l'Energia s'inclou en el sistema tot el motor aleshores l'energia rebuda és la d'alimentació del motor, elèctrica en un motor elèctric, i a l'energia cedida per la màquina cal afegir-hi la dissipada en el motor, usualment en forma de rendiment del motor, rendiment electromecànic si el motor és elèctric.

El canvi de signe inclòs en la definició del parell resistent del receptor queda clar si s'apliquen les expressions 2 al sistema format únicament pel receptor, en règim estacionari i si la seva inèrcia reduïda fos constant. En aquest cas $\dot{E}_c = 0$ i $P_{\text{rebuda}} = P_{\text{cedida}}$. La potència rebuda és la potència del parell que rep al seu eix $T_{\text{rec}} \dot{\varphi}$ i és igual a la potència cedida, que és la potència de les forces que els seus elements mòbils fan a l'exterior, de signe contrari a la de les forces que els seus elements mòbils reben de l'exterior.

Per estudiar el comportament d'una màquina rotativa, com el de tot sistema d'un grau de llibertat en el qual les forces que hi actuen diferents de les d'enllaç no són funció d'aquestes, cal integrar l'equació del moviment 1. Per fer-ho, cal conèixer només els paràmetres que hi intervenen, la inèrcia reduïda i els parells reduïts. Aquesta equació només es pot resoldre analíticament quan la inèrcia reduïda i els parells reduïts tenen una descripció molt elemental de manera que és usual resoldre-la numèricament. La resolució numèrica no presenta cap problema, només cal elegir convenientment els paràmetres de l'algorisme d'integració per tractar adequadament les possibles particularitats dels paràmetres de la màquina funció de la configuració, donada per l'angle φ , i de la velocitat $\dot{\varphi}$. En general, si aquests no presenten discontinuïtats o variacions molt importants els paràmetres per defecte dels algorismes d'integració són suficients. Si per a la integració no es parteix del repòs, situació usual quan es vol estudiar el règim estacionari sense fer una integració molt llarga en el temps, cal elegir les condicions inicials de manera que siguin properes a un estat d'aquest règim.



MÀQUINA ROTATIVA AMB INÈRCIA REDUÏDA CONSTANT I PARELL REDUÏT INDEPENDENT DE LA VELOCITAT ANGULAR

Si la inèrcia reduïda és constant i el parell és únicament funció de l'angle, l'equació del moviment 1 és

$$I_{\text{red}}\ddot{\varphi} - T_{\text{red}}(\varphi) = 0 \quad [3]$$

Grau d'irregularitat del règim estacionari

Com que $\ddot{\varphi}$ és la derivada de la velocitat angular, $\ddot{\varphi} = d\omega/dt$, l'expressió anterior es pot escriure com

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I_{\text{red}}} T_{\text{red}}(\varphi)$$

que posa de manifest que els zeros del parell reduït $T_{\text{red}}(\varphi)$ corresponen als extrems, màxims i mínims, d' ω . Siguin ω_{max} i ω_{min} els valors màxim i mínim absoluts d' ω en un cicle, que es produeixen per a $\varphi_{\omega_{\text{max}}}$ i $\varphi_{\omega_{\text{min}}}$. Si es planteja el Teorema de l'Energia entre aquestes configuracions es té

$$\Delta E_c \Big|_{\omega_{\text{min}}}^{\omega_{\text{max}}} = \int_{\varphi_{\omega_{\text{min}}}}^{\varphi_{\omega_{\text{max}}}} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi = W_{\text{max}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} I_{\text{red}} (\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2) = W_{\text{max}} \quad [4]$$

Si es té en compte la definició del grau d'irregularitat δ i es considera que la velocitat angular mitjana ω_{mit} és la semisuma de la velocitat angular màxima i mínima

$$\frac{(\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2)}{2} = (\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}) \frac{(\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}})}{2} = \delta \omega_{\text{mit}} \omega_{\text{mit}} = \delta \omega_{\text{mit}}^2$$

Substituint a l'expressió 4 es té

$$I_{\text{red}} \delta \omega_{\text{mit}}^2 = W_{\text{max}} \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{W_{\text{max}}}{I_{\text{red}} \omega_{\text{mit}}^2} \quad [5]$$

L'expressió 5 posa de manifest que en el cas estudiat en aquest apartat –inèrcia reduïda constant i parell reduït independent de la velocitat– es pot determinar una aproximació del grau d'irregularitat (és una aproximació ja que s'ha suposat que la velocitat angular mitjana és la semisuma de la màxima i la mínima) a partir del treball W_{max} realitzat pel parell reduït entre les configuracions que és nul. Si les hipòtesis establertes són vàlides per a una certa màquina de moment d'inèrcia reduït I_{red} , aquesta expressió 5 es pot utilitzar per calcular el moment d'inèrcia



axial del volant d'inèrcia I_{vol} necessari per obtenir el grau d'irregularitat δ_a desitjat.

$$\delta_a = \frac{W_{\text{max}}}{I_{\text{total}} \omega_{\text{mit}}^2} \quad \text{amb} \quad I_{\text{total}} = I_{\text{red}} + I_{\text{vol}} \quad \rightarrow \quad I_{\text{vol}} = \frac{W_{\text{max}}}{\omega_{\text{mit}}^2 \delta_a} - I_{\text{red}} \quad [6]$$

Temps d'arrencada i temps de frenada

El temps d'arrencada, temps per arribar a la velocitat de règim estacionari, d'una màquina rotativa en general és prou llarg per incloure un nombre considerable de cicles de funcionament. Si és així, amb prou precisió en la integració de l'equació de moviment de l'expressió 3 des del repòs fins a la velocitat de règim permanent, es pot substituir el parell reduït pel seu valor mitjà.

$$I_{\text{red}} \ddot{\varphi} - T_{\text{red}}(\varphi) = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta\omega \Big|_0^t = \frac{1}{I_{\text{red}}} \int_0^t T_{\text{red}}(\varphi) dt \approx \frac{1}{I_{\text{red}}} T_{\text{red mit}} \Delta t \Big|_0^t \quad [7]$$

$$\Delta\omega = \frac{T_{\text{red mit}}}{I_{\text{red}}} \Delta t \quad \rightarrow \quad \alpha_{\text{mit}} = \frac{T_{\text{red mit}}}{I_{\text{red}}}$$

En resum, en general si el parell reduït no depèn de la velocitat, es pot admetre amb prou aproximació que durant l'arrencada el moviment és uniformement accelerat amb acceleració angular α_{mit} i que el temps d'arrencada és $t_a = \omega_{\text{mot}} / \alpha_{\text{mit}}$.

Per a l'aturada lliure, sense la intervenció de cap fre, són vàlids els comentaris del paràgraf anterior.

Trajectòria en el pla de fases

L'equació 3 es pot integrar multiplicant-la per $d\varphi$ i tenint en compte que $\ddot{\varphi} d\varphi = (1/2) d\dot{\varphi}^2$, que és el què es fa per arribar de l'equació de Newton al Teorema de l'Energia. En definitiva, el Teorema de l'Energia aplicat al sistema estudiat entre els estats $(\varphi = 0, \omega_0)$ i (φ, ω) permet escriure

$$\Delta E_c \Big|_{\omega_0}^{\omega} = \int_0^{\varphi} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} I_{\text{red}} (\omega^2 - \omega_0^2) = \int_0^{\varphi} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi \quad \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{I_{\text{red}}} \int_0^{\varphi} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi + \omega_0^2} = \omega(\varphi) \quad [8]$$

En aquesta expressió es posa de manifest que ω és només funció de φ , $\omega(\varphi)$. El pla ω - φ s'anomena pla de fases i en altres àmbits la representació d' $\omega(\varphi)$ en aquest pla s'anomena trajectòria en el pla de fases i en règim cíclic és una corba tancada.



Dels extrems, màxim i mínim, d'aquesta corba es determina el grau d'irregularitat δ .

De l'expressió de la velocitat angular $\omega = \omega(\varphi)$ es pot determinar $\varphi(t)$ integrant per separació de variables, de manera que si es pren $\varphi = 0$ per a $t = 0$ es té

$$\omega = \omega(\varphi) \rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \omega(\varphi) \rightarrow dt = \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} \rightarrow t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}$$

El procés descrit en aquest apartat per determinar tant el grau d'irregularitat com $\varphi(t)$ cal veure'l amb precaució en front del procediment descrit en l'apartat anterior per determinar el grau d'irregularitat i del procediment d'integració directa de l'equació 3 per determinar $\varphi(t)$.

Variació localitzada del parell reduït $T_{\text{red}}(\varphi)$

En algunes màquines, com per exemple premses i punxonadores, la variació de parell resistent i la conseqüent variació de velocitat angular es produeixen en un tram del cicle de funcionament molt localitzat, quan es produeix l'operació de treball. En aquests casos i sobretot si no es coneix en detall l'evolució del parell resistent, es pot prendre com a valor conservador de la irregularitat l'obtingut emprant com a W_{max} el treball fet pel motor en un cicle sencer.

EXERCICI 1

En una màquina rotativa, com la de la figura 1 sense volant, el motor està unit directament a l'element receptor que requereix 12 voltes de l'eix motor per realitzar un cicle complet del seu funcionament. El moment d'inèrcia de tota la màquina reduït a l'eix del motor és $I_{\text{red}} = 13 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, el parell resistent $T_{\text{res}}(\varphi)$ reduït també a l'eix del motor és l'indicat a la figura 1.1 i la velocitat de rotació del motor és $n_{\text{mot}} = 710 \text{ min}^{-1}$. Determineu en règim estacionari:

a) La potència mitjana i el parell mitjà del motor.

Si el parell motor és constant i igual al parell mitjà calculat, determineu en règim estacionari:

b) El grau d'irregularitat δ de la rotació de l'eix motor.

c) El volant que cal incorporar a l'eix del motor per tal que el grau d'irregularitat de la seva rotació no superi $\delta_{\text{max}} = 0,01$.



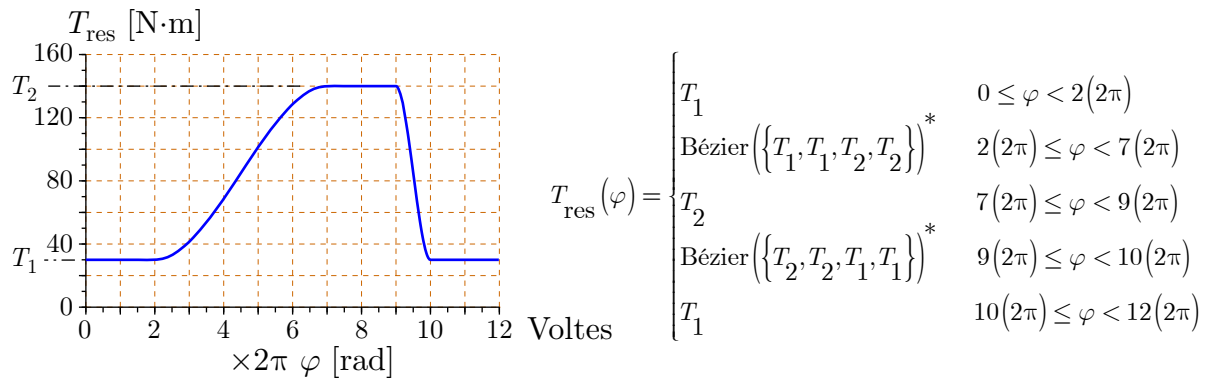


Figura 1.1 Parell resistent de la màquina. Gràfic i descripció analítica.

*Corba de Bézier paramètrica amb les ordenades de Bézier indicades.

Solució

a) L'energia consumida pel receptor en un cicle E_{cicle} és també l'energia subministrada pel motor en un cicle ja que el règim de funcionament de la màquina és estacionari cíclic. Aquesta energia és igual al treball fet pel parell resistent –integral del parell al llarg del cicle que es calcula, per exemple, numèricament a partir de la seva expressió analítica.

$$E_{\text{cicle}} = \int_{\text{cicle}} T_{\text{rec}}(\varphi) d\varphi = 5718 \text{ J}$$

El temps t_{cicle} que dura un cicle, període, és funció de la velocitat del motor.

$$t_{\text{cicle}} = \frac{60}{n_{\text{mot}}} 12 = 1,014 \text{ s}$$

La potència mitjana del motor P_{mot} és el quocient entre l'energia en un cicle i el temps que dura aquest. El parell mitjà del motor T_{mot} és el quocient entre la potència mitjana i la velocitat angular ω_{mot} del motor.

$$P_{\text{mot}} = \frac{E_{\text{cicle}}}{t_{\text{cicle}}} = 5638 \text{ W} \quad T_{\text{mot}} = \frac{P_{\text{mot}}}{\omega_{\text{mot}}} = \frac{P_{\text{mot}}}{\left(n_{\text{mot}}/60\right) 2\pi} = 75,83 \text{ N.m}$$

b) A la figura 1.2 es mostren el parell resistent T_{res} , el parell motor T_{mot} i el parell total reduït a l'eix del motor $T_{\text{red}} = T_{\text{mot}} - T_{\text{res}}$. Els zeros del parell reduït es poden trobar directament del gràfic o numèricament. Els valors obtinguts són: $\varphi_{\omega_{\text{max}}} = 26,52 \text{ rad}$ (4,221 voltes) i $\varphi_{\omega_{\text{min}}} = 60,04 \text{ rad}$ (9,556 voltes).



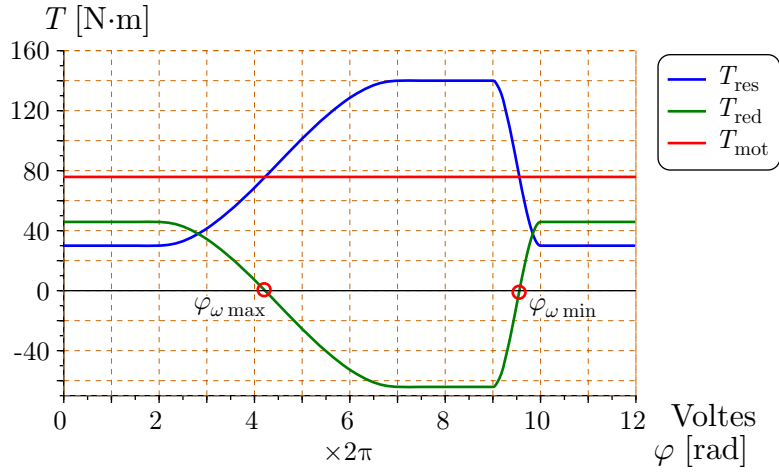


Figura 1.2 Parell total reduït a l'eix del motor.

El treball $W_{\max}$ realitzat pel parell reduït entre aquestes configuracions és

$$W_{\max} = \int_{\varphi_{\omega \min}}^{\varphi_{\omega \max}} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi = - \int_{\varphi_{\omega \max}}^{\varphi_{\omega \min}} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi = 1637 \text{ J}$$

El grau d'irregularitat obtingut amb l'expressió 5 és

$$\delta = \frac{W_{\max}}{I_{\text{red}} \omega_{\text{mit}}^2} = \frac{W_{\max}}{I_{\text{red}} \omega_{\text{mot}}^2} = 0,028$$

c) El volant necessari per obtenir el grau d'irregularitat proposat es determina a partir de l'expressió 6.

$$I_{\text{vol}} = \frac{W_{\max}}{\omega_{\text{mot}}^2 \delta_{\max}} - I_{\text{red}} = 16,61 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

A la figura 1.3 es poden veure els gràfics de la velocitat angular funció del temps per a la màquina amb i sense volant. Aquests resultats s'han obtingut per integració numèrica de l'equació del moviment de l'expressió 3 amb els valors dels paràmetres de l'aplicació actual. Es pot comprovar la coincidència dels graus d'irregularitat obtinguts en els apartats anteriors i els obtinguts a partir d'aquests gràfics.

És interessant també observar a la figura 1.3 que la periodicitat de la variació de la velocitat angular no està lligada directament a la velocitat de rotació del motor sinó a la periodicitat del parell resistent.



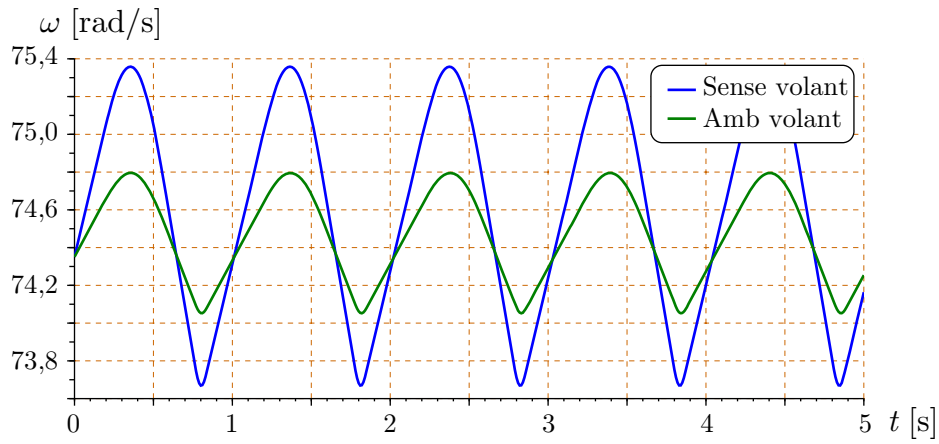


Figura 1.3 Velocitat angular amb i sense volant.

L'augment de la inèrcia de la cadena cinemàtica de la màquina causada pel volant provoca un augment del temps de resposta en règim transitori, de manera que mantenint les condicions tant el temps d'arrencada com el de parada augmenten. A la figura 1.4 es mostra l'arrencada amb un parell doble del calculat per a règim estacionari i el temps d'aturada lliure suposant en ambdós casos que el parell resistent es manté. Els dos gràfics s'han obtingut per integració numèrica de l'equació del moviment de l'expressió 3 amb les condicions indicades.

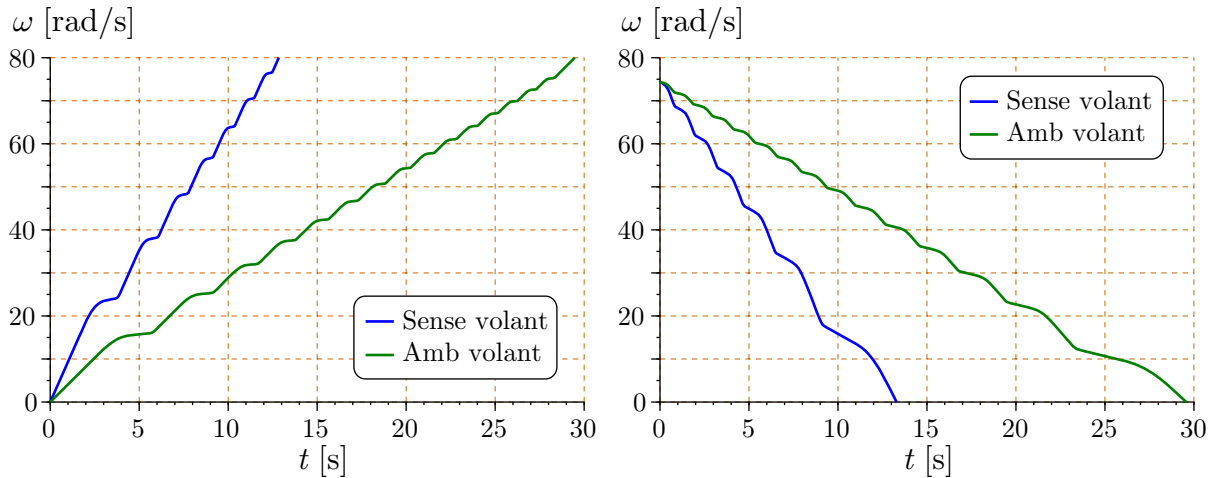


Figura 1.4 Arrencada i parada amb i sense volant.

Els temps d'arrencada per a la màquina de l'exercici actual, expressió 7, són:

Sense volant: $\alpha_{\text{mit}} = 5,833 \text{ rad/s}^2$ $t_a = 12,75 \text{ s}$

Amb volant; $\alpha_{\text{mit}} = 2,561 \text{ rad/s}^2$ $t_a = 29,03 \text{ s}$

Per a l'aturada lliure de la màquina els temps coincideixen ja que amb el parell motor a l'arrencada pres, $2T_{\text{mot}}$, el parell reduït a l'arrencada és T_{mot} i a la parada és $-T_{\text{mot}}$.



MÀQUINA ROTATIVA AMB INÈRCIA REDUÏDA CONSTANT I PARELL REDUÏT INDEPENDENT DE LA CONFIGURACIÓ ANGULAR

En una màquina rotativa cíclica en règim estacionari si el parell reduït és funció de la configuració angular $-T_{\text{red}}(\varphi)$ — és una funció periòdica de període, en general, igual a unes poques voltes de l'eix principal de la màquina, ja sigui l'eix del motor o l'eix del receptor, com per exemple el de la figura 1.2. Durant el funcionament de la màquina s'escombra periòdicament tot el domini de variació de l'angle i per tant la variació del parell, recorregut de la funció $T_{\text{red}}(\varphi)$, és tota la possible. En règim estacionari la velocitat angular és sensiblement constant tal com es veu en la màquina de l'exercici 1. L'interval de variació d' ω respecte al seu valor mitjà, definit pel grau d'irregularitat, és petit, i per tant, si el parell reduït és funció de la velocitat angular $-T_{\text{red}}(\omega)$ — la variació del parell és només una petita part, sovint molt petita, del recorregut de la funció $T_{\text{red}}(\omega)$ i té poca incidència en el funcionament en règim estacionari de la màquina. És per aquesta raó que la variació del parell reduït en funció d' ω en els estudis clàssics de màquines rotatives, o no necessàriament rotatives, es planteja des d'un altre punt de vista.

Corbes característiques

Si la dependència del parell reduït —ja sigui motor, resistent o de resistències passives a la transmissió— de la configuració és negligible o en l'estudi que es vol fer el seu efecte es pot substituir per una mitjana al llarg d'un període, aleshores es considera el parell com una funció només d' ω . El gràfic d'aquesta funció $T(\omega)$ s'anomena corba característica de l'element. Les corbes característiques és usual que depenguin d'un o més paràmetres de l'element de manera que per a un conjunt de valors d'un paràmetre es té una família de corbes característiques.

A la figura 3 es mostren dues famílies de corbes característiques d'un motor d'inducció on el paràmetre de la família és la tensió d'alimentació. Si bé usualment les corbes característiques solen ser de parell, o força en elements de moviment lineal, funció de velocitat també s'utilitzen les corbes característiques de potència (subministrada pels motors i rebuda pels receptors) en funció de la velocitat, $P(\omega)$. Òbviament es passa de les de parell a les de potència simplement per producte amb la velocitat.



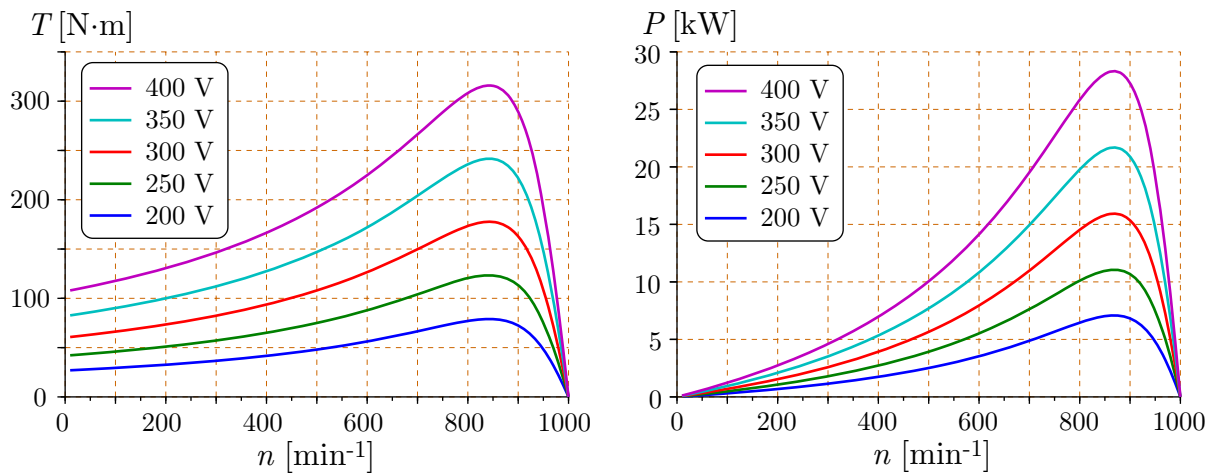


Figura 3 Corbes característiques de parell i de potència d'un motor d'inducció.

En la figura 4 s'inclou en el mateix gràfic les corbes característiques del motor i el parell resistent de l'element receptor que fa moure el motor. Parell motor i parell resistent estan reduïts al mateix eix. Per a un valor donat de la tensió d'alimentació, p.e. 400 V, en els punts d'intersecció P i Q de la corba de parell motor i de la corba de parell resistent aquests coincideixen i per tant també coincideixen la potència mitjana subministrada pel motor i la rebuda, i consumida, pel receptor. Així doncs, a la velocitat corresponent a aquests punts no hi ha energia que es pugui dedicar a modificar l'energia cinètica mitjana de la màquina i per tant aquesta funciona a velocitat mitjana constant. En definitiva, doncs, els punts d'intersecció P i Q corresponen a funcionament de la màquina en règim estacionari. Cal, però, fer atenció al diferent comportament de la màquina a l'entorn dels punts P i Q.

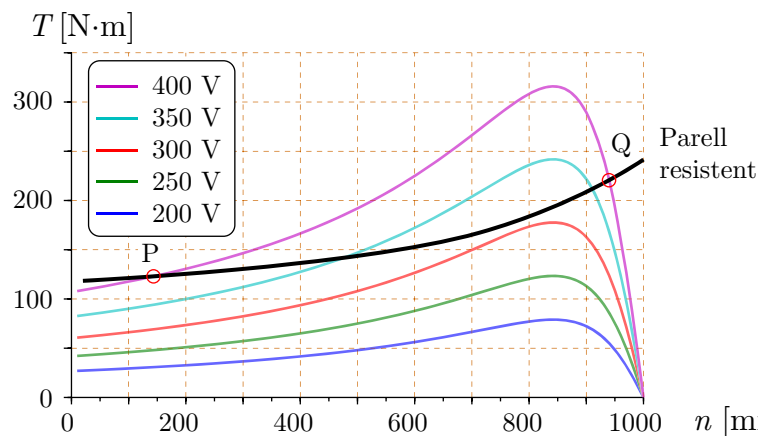


Figura 4 Corbes característiques i règim de funcionament.

Si la màquina es mou a la velocitat de Q i per efecte d'alguna pertorbació externa la velocitat augmenta, el parell motor disminueix i el parell resistent augmenta de manera que la velocitat torna a disminuir quan cessa la pertorbació. Si la pertorba-

ció fa disminuir la velocitat el parell motor augmenta i el parell resistent disminueix i per tant la velocitat torna a augmentar quan cessa la pertorbació. Es tracta, doncs, d'un règim de funcionament estacionari estable.

Si la màquina es mou a la velocitat de P i per efecte d'alguna pertorbació externa la velocitat augmenta, el parell motor augmenta més que el parell resistent de manera que la velocitat augmenta més. Si la pertorbació fa disminuir la velocitat el parell motor disminueix més que el parell resistent i per tant la velocitat disminueix més. Es tracta, doncs, d'un règim de funcionament estacionari inestable.

L'anàlisi de les corbes característiques dóna més informació que la comentada en els paràgrafs anteriors. Així per exemple: i) Amb el parell resistent mostrat a la figura el motor no pot arrencar ni amb la màxima tensió d'alimentació; ii) Es pot modificar lleugerament la velocitat de règim estacionari modificant la tensió d'alimentació.

Equació del moviment

Si la inèrcia reduïda és constant i el parell és únicament funció de la velocitat, l'equació del moviment 1 és

$$I_{\text{red}} \ddot{\varphi} - T_{\text{red}}(\dot{\varphi}) = 0$$

Com que $\ddot{\varphi}$ és la derivada de la velocitat angular, $\ddot{\varphi} = d\omega/dt$, l'expressió anterior es pot escriure com una equació diferencial de primer ordre en ω .

$$I_{\text{red}} \dot{\omega} - T_{\text{red}}(\omega) = 0 \quad [9]$$

Aquesta equació es pot integrar per separació de variables i trobar el temps necessari per passar d'una velocitat angular a una altra.

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = \frac{T_{\text{red}}(\omega)}{I_{\text{red}}} &\rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{T_{\text{red}}(\omega)}{I_{\text{red}}} \rightarrow dt = \frac{I_{\text{red}}}{T_{\text{red}}(\omega)} d\omega \\ \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{I_{\text{red}}}{T_{\text{red}}(\omega)} d\omega &\rightarrow t_2 = t_1 + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{I_{\text{red}}}{T_{\text{red}}(\omega)} d\omega \end{aligned} \quad [10]$$

Partint del repòs o d'una velocitat qualsevol, l'evolució per arribar al règim estacionari, donat com s'ha vist per la intercessió de les corbes característiques de motor i del receptor, és asimptòtica. Suposant que les corbes característiques són contínues i tal com es pot veure per exemple a la figura 4, a mesura que el sistema s'acosta al règim estacionari el parell reduït, diferència del parell motor i del parell resistent,



va disminuint i per tant també ho fa l'acceleració i l'increment de velocitat per arribar-hi.

Zona de treball

La possibilitat de modificar alguns paràmetres del funcionament d'un motor i de modificar la seva alimentació fa, tal com s'ha vist en l'exemple dels motors d'inducció, que el parell i la velocitat que poden subministrar no defineixin una única corba característica sinó que defineixin una regió del pla velocitat-parell en la qual poden funcionar i que s'anomena la zona de treball del motor.

Aquesta zona típicament està acotada per valors lldar, no superables de manera contínua o durant intervals més o menys llargs, establerts per les característiques de disseny del motor. Així, per a un motor elèctric es té una limitació de parell màxim, provinent tant de les característiques mecàniques, resistència dels elements mecànics, com del fet que el parell està lligat al corrent elèctric que circula pel motor i que ha de generar el controlador del motor. Una segona limitació és la relativa a la velocitat màxima també lligada a aspectes mecànics –desequilibri, forces centrífugues admissibles...– i a aspectes elèctrics ja que la velocitat està lligada a la tensió d'alimentació. La tercera limitació prové d'aspectes tèrmics i limita la potència subministrada de manera permanent o intermitent. A major potència subministrada pel motor, major potència no convertida a potència mecànica i per tant dissipada pel motor, en forma de calor, en un moment o altre. La potència dissipada està condicionada pel disseny –aletes de refrigeració, ventiladors... La massa tèrmica del motor fa que pugui absorbir, augmentant la seva temperatura, increments més o menys perllongats però limitats de potència que posteriorment haurà d'anar dissipant; això fa que el motor pugui generar valors puntuals de potència superiors a la potència contínua que pot generar, usualment considerada com a nominal. A la figura 5 es mostra un exemple de zona de treball d'un motor. Cal notar que en el pla velocitat-parell una corba a potència constant és una hipèrbola.

Es pot definir, de manera similar, la zona de treball d'un receptor però el seu comportament sol ser molt més rígid que el del motor ja que està condicionat per la tasca que ha de fer i el temps que té per fer-la. Això fa que la zona de treball pugui quedar molt reduïda fins i tot a pràcticament un punt de funcionament. Aleshores, cal intentar que aquest punt quedi dins de la zona, òptima si pot ser, de funciona-



ment del motor escollint adequadament les característiques i paràmetres del motor i de la transmissió.

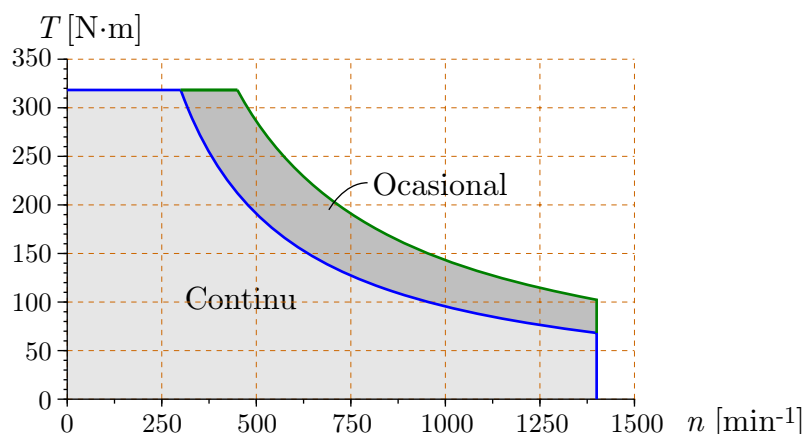


Figura 5. Zona de treball d'un motor, exemple.

EXERCICI 2

El parell d'un motor de corrent continu d'excitació independent es pot aproximar per l'expressió $T_m = cI$ on $I = (U - c\omega)/R$, $R = 0,6 \Omega$ és la resistència de l'induït, $c = 0,08 \text{ N}\cdot\text{m} / \text{A}$ és la constant de parell –proporcional al camp magnètic–, I és el corrent elèctric de l'induït, ω és la velocitat angular de l'eix i U és la tensió d'alimentació. Aquest motor acciona a través d'una transmissió un ventilador. El parell resistent del ventilador més el parell reduït de les resistències passives de la transmissió són equivalents a un parell resistent total reduït a l'eix del motor d'expressió $T_{\text{res}} = c_1 + c_2 \omega^2$ on $c_1 = 0,2 \text{ N}\cdot\text{m}$ i $c_2 = 25 \cdot 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}/(\text{rad}/\text{s})$. El moment d'inèrcia dels elements mòbils reduït a l'eix del motor és $I_{\text{red}} = 0,018 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Determineu:

- La família de corbes característiques del motor per a $0 \text{ V} \leq U \leq 24 \text{ V}$. Superposeu en el gràfic el parell resistent.
- La velocitat de règim estacionari a $U = 24 \text{ V}$.
- La velocitat en funció del temps si el ventilador arrenca del repòs a tensió constant $U = 24 \text{ V}$.
- La velocitat en funció del temps si a l'arrencada des del repòs s'incrementa la tensió d'alimentació linealment de 0 V a 24 V en 3 s i a continuació es manté constant.



Solució

a) A la figura 2.1 es mostren les corbes característiques de motor i del receptor, obtingudes simplement substituint en les expressions corresponents els valors dels paràmetres donats per a cada element.

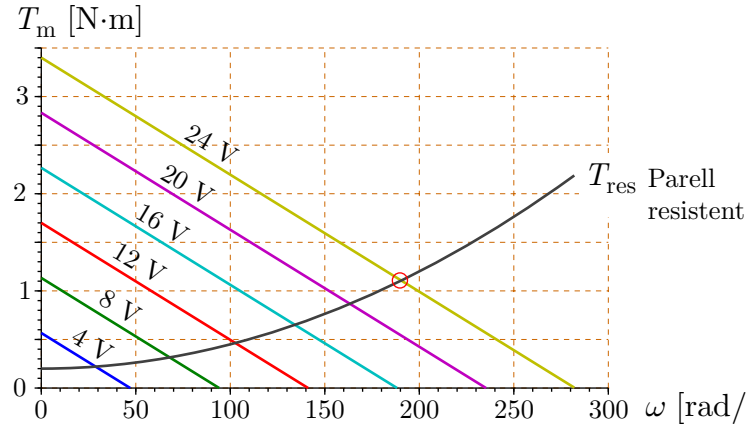


Figura 2.1 Corbes característiques del motor i del receptor.

b) La velocitat de règim estacionari és aquella per a la qual el parell motor a la tensió donada, 24 V, és igual al parell resistent, intersecció de les dues corbes característiques assenyalada a la figura 2.1. Igualant les expressions del parell motor, a 24 V, i del parell resistent es té l'equació en ω , la solució de la qual és la velocitat buscada.

$$c \frac{(U - c\omega)}{R} = c_1 + c_2 \omega^2 \rightarrow \omega_{\text{est}} = 190,4 \text{ rad/s} \rightarrow n_{\text{est}} = 1818 \text{ min}^{-1}$$

c) Per determinar la velocitat angular en funció del temps en el procés d'arrencada descrit, des del repòs i amb un graó de tensió de 0 V a 24 V, es pot utilitzar l'expressió 9 o alternativament integrar directament l'equació del moviment de l'expressió 1 amb $T_{\text{red}}(\omega) = T_m(\omega) - T_{\text{res}}(\omega) = c(U - c\omega)/R - (c_1 + c_2 \omega^2)$.

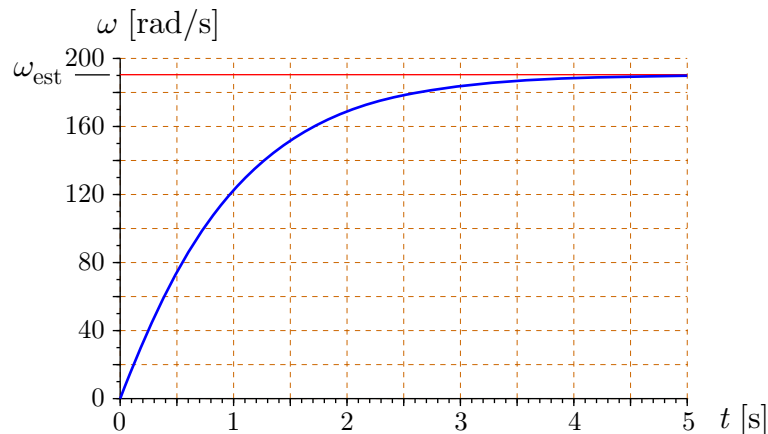


Figura 2.2 Evolució de la velocitat angular en l'arrencada.



A la figura 2.2 es mostra el resultat obtingut per integració numèrica. S'observa la tendència asimptòtica de la velocitat angular cap a la velocitat de règim estacionari.

d) En variar la tensió d'alimentació durant l'arrencada el parell reduït és ara també funció del temps i l'equació del moviment 9 passa a ser

$$I_{\text{red}} \dot{\omega} - T_{\text{red}}(\omega, t) = 0 \quad \text{amb} \quad T_{\text{red}}(\omega) = c(U(t) - c\omega)/R - (c_1 + c_2 \omega^2)$$

Per obtenir la velocitat angular en funció del temps, el procediment de separació de variables de l'expressió 10 és encara possible amb les expressions analítiques dels parells d'aquest exercici però no és clar que proporcioni cap avantatge en front de la integració directa de l'equació del moviment. A la figura 2.3 es mostra el resultat obtingut per integració numèrica. S'inclouen a la figura l'evolució de la tensió d'alimentació i l'evolució de la velocitat angular durant l'arrencada amb tensió constant.

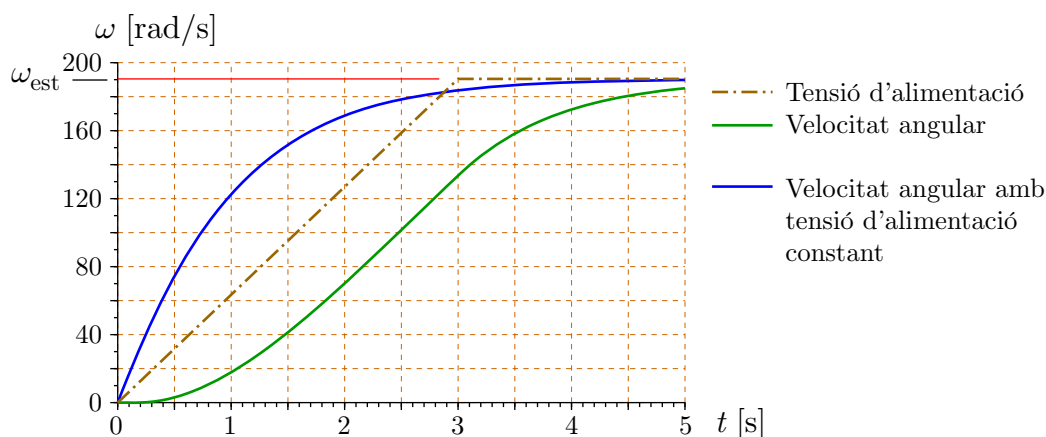


Figura 2.3 Evolució de la velocitat angular en l'arrencada.

S'observa que en els primers instants, mentre la tensió d'alimentació no és suficient perquè el motor proporcioni un parell superior a c_1 , la velocitat angular és nul·la, no arrenca. El temps que transcorre en aquesta situació és

$$cU(t)/R - c_1 = 0 \quad \text{amb} \quad U(t) = 24(t/3) \quad \rightarrow \quad t = 0,1765 \text{ s}$$

També s'observa que en una bona part del tram de pujada de la tensió, el retard en la resposta de la velocitat és de l'ordre d'1s.



MÀQUINA ROTATIVA AMB INÈRCIA REDUÏDA NO CONSTANT I PARELL REDUÏT INDEPENDENT DE LA VELOCITAT ANGULAR

Període

Si la inèrcia reduïda no és constant i el parell és únicament funció de l'angle, l'equació del moviment 1 és

$$I_{\text{red}}(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}I_{\text{red}}(\varphi)\dot{\varphi}^2 - T_{\text{red}}(\varphi) = 0 \quad [11]$$

En una màquina rotativa $I_{\text{red}}(\varphi)$, $I_{\text{red}}(\varphi)$ i $T_{\text{red}}(\varphi)$ són periòdics i $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$ també ho són com es posa de manifest després de trobar el període. El període T es pot determinar integrant pas a pas l'equació del moviment i veient quan els valors de $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$ es tornen a repetir, $\varphi(t_0 + t) = \varphi(t_0)$ i $\dot{\varphi}(t_0 + t) = \dot{\varphi}(t_0)$.

El Teorema de l'Energia aplicat al sistema estudiat entre els estats $(\varphi_0 = 0, \omega_0)$ i (φ, ω) permet escriure

$$\Delta E_c \Big|_{\omega_0}^{\omega} = \int_0^{\varphi} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi \rightarrow \frac{1}{2}I_{\text{red}}(\varphi)(\omega^2 - \omega_0^2) = \int_0^{\varphi} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi \rightarrow$$
$$E_c(\varphi) = \frac{1}{2}I_{\text{red}}(\varphi)\omega^2 = A(\varphi) + C \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2(A(\varphi) + C)}{I_{\text{red}}(\varphi)}} = \omega(\varphi) \quad [12]$$

$$\text{amb } A(\varphi) = \int_0^{\varphi} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi \quad \text{i} \quad C = \frac{1}{2}I_{\text{red}}(\varphi = 0)\omega_0^2$$

Aquesta expressió de la velocitat angular es pot integrar per separació de variables per determinar $\varphi(t)$, de manera que si es pren $\varphi = 0$ per a $t = 0$ es té

$$\omega = \omega(\varphi) \rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \omega(\varphi) \rightarrow t = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} = \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{I_{\text{red}}(\varphi)}{2(A(\varphi) + C)}} d\varphi \quad [13]$$

Si es particularitza l'expressió anterior per a un cicle, corresponent per exemple a una volta $\varphi = 2\pi$, s'obté el període.

$$T = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{I_{\text{red}}(\varphi)}{2(A(\varphi) + C)}} d\varphi \quad [14]$$

Aquesta expressió posa de manifest que el període és funció de les característiques inercials del sistema, $I_{\text{red}}(\varphi)$, de les forces que hi actuen, $T_{\text{red}}(\varphi)$, i de les condicions amb què s'inicia el moviment, C .



Diagrama de Wittenbauer. Grau d'irregularitat

Per tal d'analitzar el grau d'irregularitat i calcular el moment d'inèrcia del volant adequat per reduir-lo a valors acceptables, Ferdinand Wittenbauer va proposar un procediment gràfico-analític basat en el diagrama: inèrcia reduïda en l'eix de les abscisses i energia cinètica en l'eix de les ordenades, que es coneix com a diagrama de Wittenbauer.

Fent atenció a l'expressió 12, es veu que l'energia cinètica és funció de φ , $E_c = (1/2)I_{\text{red}}(\varphi)\omega^2 = A(\varphi) + C$. Així doncs, utilitzant φ com a paràmetre s'obté el diagrama de Wittenbauer $[I_{\text{red}}(\varphi), E_c(\varphi)]$, figura 6. En funció del valor que es prengui per a ω_0 , i per tant per a C , el diagrama només es desplaça verticalment però no canvia de forma.

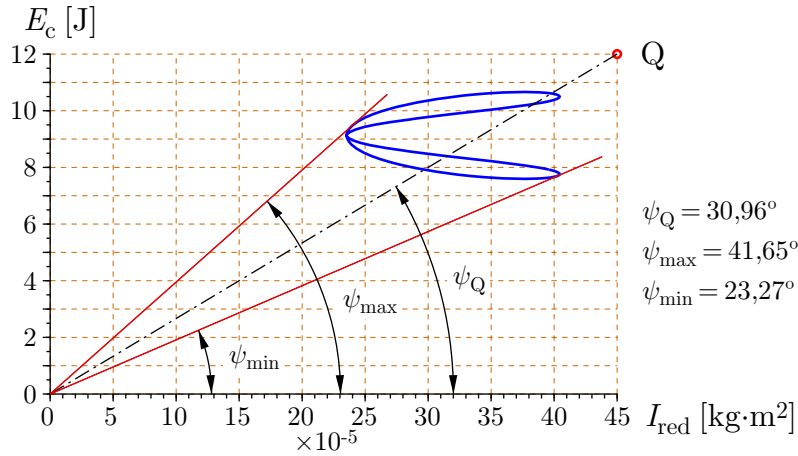


Figura 6. Diagrama de Wittenbauer d'un motor alternatiu.

Aquest diagrama té una propietat interessant. La recta que uneix un punt qualsevol del pla on es representa el diagrama amb l'origen de coordenades té un pendent proporcional al quadrat de la velocitat angular en aquest punt, $E_c(\varphi)/I_{\text{red}}(\varphi) = (1/2)\omega^2$. El factor de proporcionalitat o d'escala f_{esc} entre el pendent i les magnituds del diagrama s'obté per inspecció directa. Així, per exemple, fent atenció al punt Q de la figura 6 es té

$$\tan \psi_Q = \frac{E_{cQ}}{I_{\text{red}Q}} f_{\text{esc}} = \frac{\omega_Q^2}{2} f_{\text{esc}} \rightarrow$$

$$f_{\text{esc}} = \frac{I_{\text{red}Q}}{E_{cQ}} \tan \psi_Q = \frac{45 \cdot 10^{-5}}{12} \tan(30,96^\circ) = 22,50 \cdot 10^{-6} \text{ s}^2$$



Cal notar que el factor d'escala té unitats de s^2 . G.G. Baranov i altres utilitzen els factors d'escala en cadascun dels eixos i donen k_E J/mm per a les ordenades i k_I $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{mm}$ per a les abscisses; en aquest cas el factor d'escala és $f_{\text{escala}} = k_I/k_E$. A la figura 6 els factors d'escala són $k_E = 0,2222$ J/mm i $k_I = 4,667\cdot 10^{-6}$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{mm}$.

Si es disposa del diagrama de Wittenbauer la velocitat angular màxima ω_{max} correspon a la de la recta de major pendent que uneix un punt del diagrama amb l'origen; aquesta recta és, evidentment, tangent al diagrama. De la mateixa manera la velocitat angular mínima ω_{min} correspon a la recta de menor pendent, també tangent al diagrama. Així doncs, traçant des de l'origen les dues tangents extremes al diagrama es tenen les velocitats angulars màxima i mínima i per tant el grau d'irregularitat. Fent de nou atenció a l'exemple de la figura 6 i prenent com a velocitat angular mitjana la semisuma de les dues velocitats angulars extremes, es té

$$\omega_{\text{max}} = \sqrt{2 \tan \psi_{\text{max}} \frac{1}{f_{\text{esc}}}} = 281,2 \text{ rad/s} \quad \omega_{\text{min}} = \sqrt{2 \tan \psi_{\text{min}} \frac{1}{f_{\text{esc}}}} = 195,5 \text{ rad/s}$$

$$\delta = \frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{(\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}})/2} = 0,3594$$

Disseny d'un volant

Si el grau d'irregularitat d'una màquina és excessiu o si en l'etapa de disseny es vol limitar el seu valor, i no es poden disminuir les fluctuacions del parell resistent o de la inèrcia reduïda, cal pensar en un volant d'inèrcia i calcular el seu moment d'inèrcia axial I_{vol} necessari per obtenir el grau d'irregularitat desitjat.

Per al càlcul del volant se suposa que es disposa del moment d'inèrcia $I_{\text{red}}(\varphi)$ de la cadena cinemàtica sense el volant, del parell reduït $T_{\text{red}}(\varphi)$ i de la velocitat angular mitjana ω_{mit} corresponent al nombre de cicles per unitat de temps que ha de fer la màquina. Amb $I_{\text{red}}(\varphi)$ i $T_{\text{red}}(\varphi)$ es pot dibuixar ja el diagrama de Wittenbauer de la màquina sense volant.

Afegir un volant a la cadena cinemàtica d'una màquina desplaça el diagrama de Wittenbauer cap a la dreta ja que la inèrcia reduïda s'incrementa amb el moment d'inèrcia del volant, que no depèn de l'angle φ , $I_{\text{red}}(\varphi) = I_{\text{red}}(\varphi) + I_{\text{vol}}$. El moment d'inèrcia del volant s'afegeix directament al moment reduït si es col·loca en l'eix de



reducció o ponderat pel quadrat de la relació de transmissió si es col·loca en un altre eix. Quant a la direcció vertical, el diagrama també només es desplaça cap amunt sense deformar-se tal com es pot veure a partir de l'expressió 12. Així doncs, per passar del diagrama de Wittenbauer de la màquina sense volant al de la màquina amb volant es poden mantenir el dibuix de la corba i les escales i desplaçar l'origen dels eixos de coordenades.

$$\Delta E_c \Big|_{\omega_0}^{\omega} = \int_0^{\varphi} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi \rightarrow \frac{1}{2} (I_{\text{red}}(\varphi) + I_{\text{vol}}) (\omega^2 - \omega_0^2) = \int_0^{\varphi} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi \rightarrow$$

$$E_c(\varphi) = \frac{1}{2} (I_{\text{red}}(\varphi) + I_{\text{vol}}) \omega^2 = A(\varphi) + C'$$

$$\text{amb } A(\varphi) = \int_0^{\varphi} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi \quad \text{i} \quad C' = \frac{1}{2} (I_{\text{red}}(\varphi = 0) + I_{\text{vol}}) \omega_0^2$$

Per dissenyar el volant primer cal decidir el grau d'irregularitat acceptat δ_a . A partir d'aquest grau d'irregularitat i de la velocitat angular mitjana de funcionament de la màquina ω_{mit} , es determina una aproximació de les dues velocitats angulars extremes admissibles.

$$\omega'_{\text{max}} = (1 + \delta_a/2) \omega_{\text{mit}} \quad \omega'_{\text{min}} = (1 - \delta_a/2) \omega_{\text{mit}}$$

Amb el factor d'escala del diagrama de Wittenbauer i les velocitats angulars extremes calculades, es determina el pendent que hauran de tenir les rectes tangents al diagrama de la màquina amb volant.

$$\tan \psi'_{\text{max}} = \frac{\omega_{\text{max}}'^2}{2} f_{\text{esc}} \quad \tan \psi'_{\text{min}} = \frac{\omega_{\text{min}}'^2}{2} f_{\text{esc}}$$

A continuació, es dibuixen les dues rectes tangents al diagrama amb els pendents calculats. La intersecció d'aquestes dues rectes és l'origen dels eixos de coordenades del diagrama de la màquina amb volant ja que d'aquesta manera les velocitats angulars màxima i mínima, i per tant el grau d'irregularitat, seran els desitjats. El desplaçament horitzontal de l'origen és, en l'escala de l'eix horitzontal del dibuix, el moment d'inèrcia del volant buscat. Veient que només cal tenir en compte el desplaçament horitzontal, la posició vertical del diagrama és irrellevant per al càlcul del volant, la constant C de l'expressió 12 es pot prendre nul·la.

Trobar la intersecció de les rectes tangents esmentades pot presentar dos inconvenients, molt atenuats si es fa servir un programa de dibuix adequat: i) la intersecció es pot produir fora del pla de treball i ii) si el grau d'irregularitat desitjat és petit els pendents de les dues rectes difereixen poc i la intersecció a part de lluny és poc



precisa. Aquests dos inconvenients es resolen utilitzant el procediment següent. A la figura 7 es mostren les dues rectes i la seva intersecció O', analitzant els triangles O'AC i O'BC s'obté el moment d'inèrcia del volant a partir del segment $\overline{AB}$.

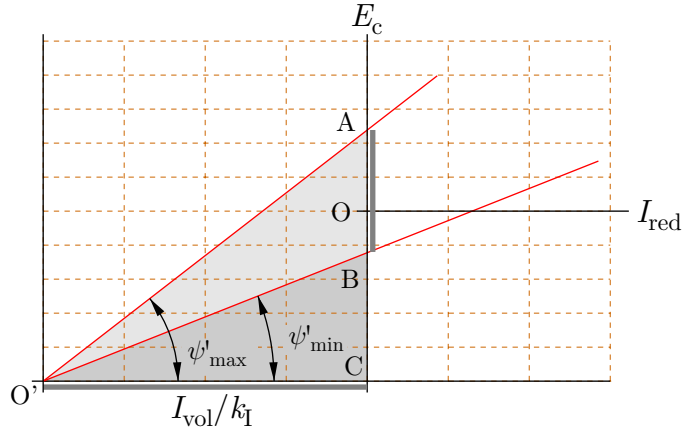


Figura 7. Determinació del moment d'inèrcia del volant.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \left(I_{\text{vol}}/k_I\right) \left(\tan \psi'_{\text{max}} - \tan \psi'_{\text{min}}\right) = \left(I_{\text{vol}}/k_I\right) \left(\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2\right) \frac{f_{\text{esc}}}{2} \\ \left(\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2\right) &= \left(\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}}\right) \left(\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}\right) = 2 \omega_{\text{mit}} \delta_a \omega_{\text{mit}} \\ f_{\text{esc}} &= \frac{k_I}{k_E} \\ \overline{AB} &= \frac{I_{\text{vol}}}{k_I} \cancel{2} \omega_{\text{mit}} \delta_a \omega_{\text{mit}} \frac{\cancel{k_I}}{k_E} \rightarrow I_{\text{vol}} = \frac{k_E \overline{AB}}{\delta_a \omega_{\text{mit}}^2}\end{aligned}\quad [15]$$

Observació

Si per al disseny d'un volant en una màquina on la irregularitat prové en part per la variació de la seva inèrcia reduïda es proposa substituir la inèrcia per un valor mitjà i utilitzar el procediment per a inèrcia reduïda constant, expressió 5, fàcilment es pot cometre un error inacceptable ja que el terme variable $\left(1/2\right) I_{\text{red } \varphi}(\varphi) \dot{\varphi}^2$, que es negligiria, pot ser molt important. Tal com es veurà, com a exemple, a l'exercici 3, el pic de variació del parell reduït és de l'ordre de 3 N·m i el pic del terme esmentat és de l'ordre de 10 N·m.

EXERCICI 3

A la figura 3.1 es mostra un mecanisme de pistó-biela-manovella en el qual el pistó rep de l'exterior una força, la biela actua com a transmissió i la manovella rep un parell de l'exterior. El centre d'inèrcia de la manovella està sobre l'eix de gir O i la resta de característiques inercials estan indicades en la figura. El parell rebut per la manovella i la força rebuda pel pistó reduïts a la rotació de la manovella generen conjuntament el parell reduït cíclic, de període 2π , indicat a la figura de forma gràfica i analítica.

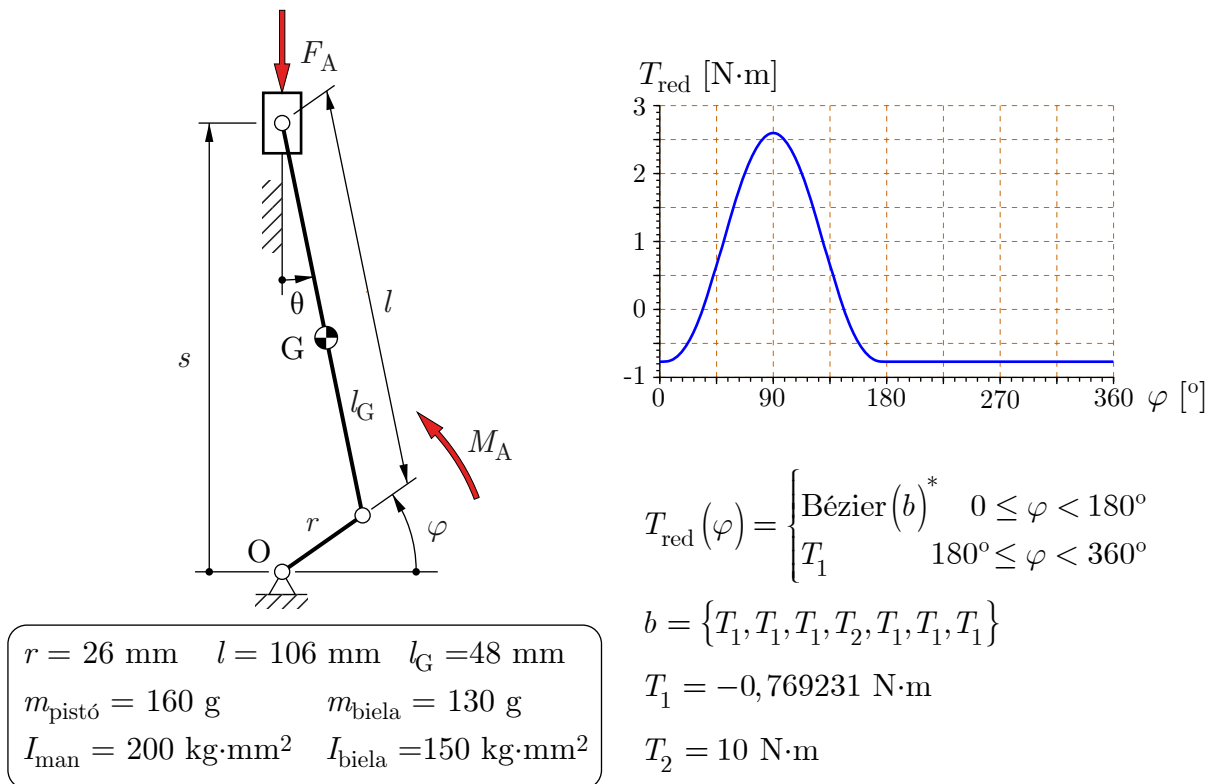


Figura 3.1 Mecanisme de pistó-biela-manovella. Parell reduït: gràfic i descripció analítica. *Corba de Bézier paramètrica amb les ordenades de Bézier indicades.

- Determineu la inèrcia del mecanisme reduïda a la rotació de la manovella i la derivada respecte a φ d'aquesta inèrcia reduïda. Comproveu que amb el parell reduït donat el règim de funcionament és estacionari cíclic. Analitzeu el període o la velocitat angular mitjana en funció de la velocitat angular inicial, ω_0 per a $\varphi_0 = 0^\circ$.
- Integreu l'equació del moviment per a unes condicions inicials donades, per exemple $\varphi_0 = 0^\circ$, $\omega_0 = 200 \text{ rad/s}$.



- c) Dibuixeu el diagrama de Wittenbauer amb les mateixes condicions inicials que a l'apartat b. Utilitzeu el diagrama per determinar el grau d'irregularitat i compareu-lo amb l'obtingut per integració de l'equació del moviment.
- d) Calculeu, utilitzant el diagrama de Wittenbauer, el moment d'inèrcia d'un volant que redueixi el grau d'irregularitat a $\delta_a = 0,05$. Per integració de l'equació del moviment proveu la bondat del càlcul.

Solució

a) La inèrcia del mecanisme reduïda a la rotació de la manovella es determina a partir de l'energia cinètica del sistema expressada en funció de la velocitat angular de la manovella $\dot{\varphi}$.

$$\begin{aligned}
 E_c &= E_{c \text{ man}} + E_{c \text{ pistó}} + E_{c \text{ biela}} \rightarrow \\
 \frac{1}{2} I_{\text{red}}(\varphi) \dot{\varphi}^2 &= \frac{1}{2} I_{\text{man}} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_{\text{pistó}} \dot{s}^2 + \left(\frac{1}{2} m_{\text{biela}} v^2(G) + \frac{1}{2} I_{\text{biela}} \dot{\theta}^2 \right) \rightarrow \\
 I_{\text{red}}(\varphi) &= I_{\text{man}} + m_{\text{pistó}} s_{\varphi}^2 + I_{\text{biela}} \theta_{\varphi}^2 + m_{\text{biela}} \left(r^2 + l_G^2 \theta_{\varphi}^2 + 2 r l_G \theta_{\varphi} \sin(\varphi - \theta) \right) \\
 \frac{d}{dt} I_{\text{red}}(\varphi) &= I_{\text{red } \varphi}(\varphi) \dot{\varphi}
 \end{aligned}$$

on:

$$s = r \sin \varphi + \left(l^2 - (r \cos \varphi)^2 \right)^{1/2} \quad \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \dot{\varphi} = s_{\varphi} \dot{\varphi}$$

$$\theta = \arcsin \frac{r \cos \varphi}{l} \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\varphi} \dot{\varphi} = \theta_{\varphi} \dot{\varphi}$$

$$\overline{OG} = \begin{Bmatrix} r \cos \varphi - l_G \sin \theta \\ r \sin \varphi + l_G \cos \theta \end{Bmatrix} \quad v(G) = \frac{d\overline{OG}}{dt}$$

Les derivades respecte a φ es poden determinar analíticament o numèricament. A la figura 3.2 es mostren $I_{\text{red}}(\varphi)$ i $I_{\text{red } \varphi}(\varphi)$ per a $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$.



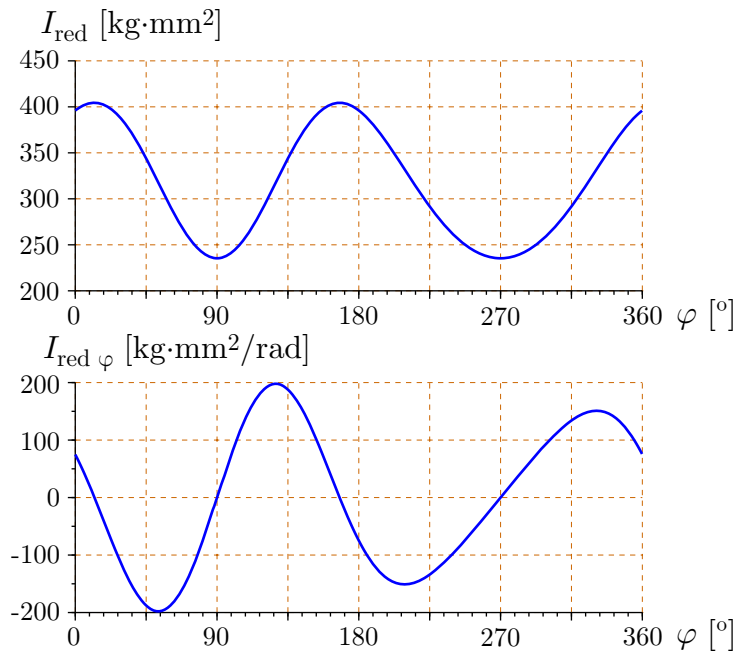


Figura 3.2 Moment d'inèrcia reduït $I_{\text{red}}(\varphi)$ i derivada $I_{\text{red } \varphi}(\varphi)$.

Per tal que amb el parell reduït donat el moviment sigui estacionari cíclic cal que

la seva integral en un cicle sigui nul·la ja que $\Delta E_c \big|_{\text{cicle}} = 0 = \int_0^{2\pi} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi$

$$\int_0^{2\pi} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} \text{Bézier}(b) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} T_1 d\varphi = \text{Bézier}(b) \Big|_{u=\pi} + T_1 \pi$$

$$b = \frac{1}{7} \{0, T_1, 2T_1, 3T_1, 3T_1 + T_2, 4T_1 + T_2, 5T_1 + T_2, 6T_1 + T_2\} \pi$$

$$\text{Bézier}(b) \Big|_{u=\pi} + T_1 \pi = \frac{1}{7} (13T_1 + T_2) \pi = 0$$

Aquest últim resultat es comprova substituint els valors donats de T_1 i T_2 .

Tal com s'ha vist anteriorment en un moviment cíclic estacionari el període ve donat per l'expressió 14.

$$T = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{I_{\text{red}}(\varphi)}{2(A(\varphi) + C)}} d\varphi \quad \text{amb} \quad A(\varphi) = \int_0^{\varphi} T_{\text{red}}(\varphi) d\varphi \quad \text{i} \quad C = \frac{1}{2} I_{\text{red}}(\varphi = 0) \omega_0^2$$

Aquesta expressió es pot integrar per a un conjunt de valors d' ω_0 , per exemple $50 \text{ rad/s} \leq \omega_0 \leq 300 \text{ rad/s}$ i a partir del període s'obté la velocitat angular mitjana $\omega_{\text{mit}} = 2\pi/T$ que es mostra en el gràfic de la figura 3.3. Per sota d' $\omega_0 = 40,5 \text{ rad/s}$ a $\varphi = 0^\circ$, la manovella no dona voltes senceres fet que es comprova integrant l'equació del moviment i que en el càlcul del període es manifesta amb $A(\varphi) + C < 0$.



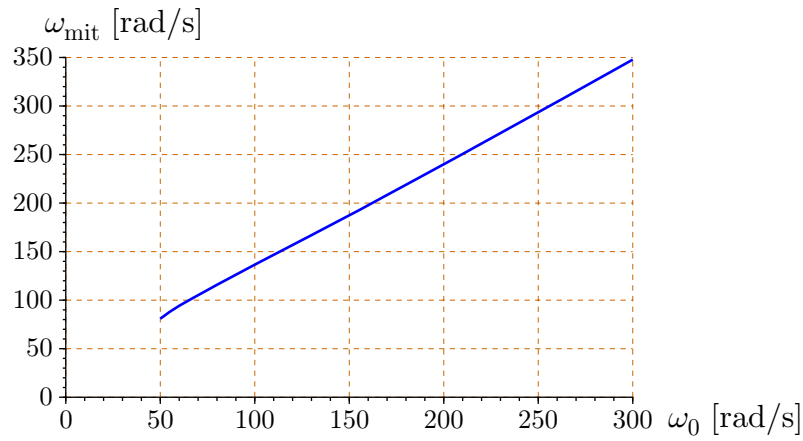


Figura 3.3 Velocitat angular mitjana en funció de la velocitat angular inicial.

b) A la figura 3.4 es mostra l'evolució temporal de la velocitat angular obtinguda per integració de l'equació del moviment amb $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 200$ rad/s.

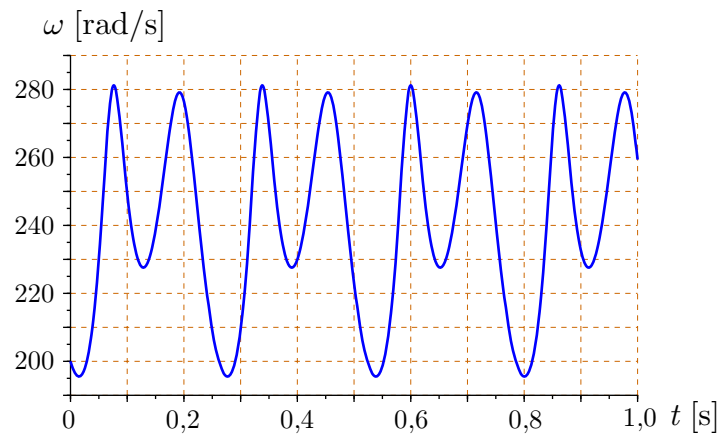


Figura 3.4 Velocitat angular partint de $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 200$ rad/s.

c) A la figura 3.5 es mostra el diagrama de Wittenbauer per a les condicions inicials anteriors. Hi estan dibuixades també les rectes que permeten trobar el grau d'irregularitat.

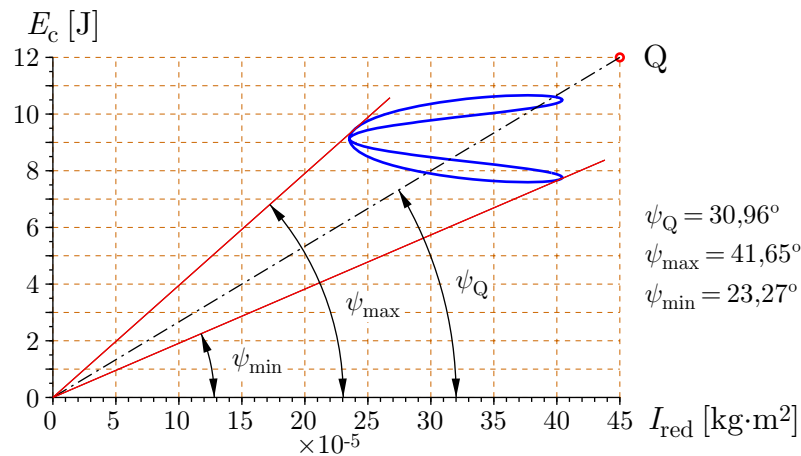


Figura 3.5 Diagrama de Wittenbauer.

Fent ús del procediment explicat a l'apartat “Diagrama de Wittenbauer. Grau d'irregularitat”, en el qual s'ha utilitzat aquest mateix diagrama, s'obtenen les velocitats angulars màxima i mínima i que com es pot veure coincideixen amb les de la figura 3.4.

$$f_{\text{esc}} = \frac{I_{\text{redQ}}}{E_{\text{cQ}}} \tan \psi_Q = \frac{45 \cdot 10^{-5}}{12} \tan(30,96^\circ) = 22,50 \cdot 10^{-6} \text{ s}^2$$

$$\omega_{\text{max}} = \sqrt{2 \tan \psi_{\text{max}} \frac{1}{f_{\text{esc}}}} = 281,2 \text{ rad/s} \quad \omega_{\text{min}} = \sqrt{2 \tan \psi_{\text{min}} \frac{1}{f_{\text{esc}}}} = 195,5 \text{ rad/s}$$

$$\delta = \frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{(\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}})/2} = 0,3594$$

En lloc de calcular la velocitat angular mitjana com a semisuma de les velocitats angulars màxima i mínima, $(\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}})/2 = 238,4 \text{ rad/s}$, es pot calcular a partir del període que per a les condicions inicials donades és $T = 26,18 \text{ ms} \rightarrow \omega_{\text{mit}} = 240,0 \text{ rad/s}$.

Seguint el procediment descrit per al disseny de volants amb un grau d'irregularitat objectiu $\delta_a = 0,05$ es té

$$\omega'_{\text{max}} = (1 + \delta_a/2) \omega_{\text{mit}} = 246,0 \text{ rad/s} \quad \omega'_{\text{min}} = (1 - \delta_a/2) \omega_{\text{mit}} = 234,0 \text{ rad/s}$$

$$\tan \psi'_{\text{max}} = \frac{\omega'^2_{\text{max}}}{2} f_{\text{esc}} = \tan(34,25^\circ) \quad \tan \psi'_{\text{min}} = \frac{\omega'^2_{\text{min}}}{2} f_{\text{esc}} = \tan(31,63^\circ)$$

Amb aquests angles es dibuixen les noves rectes tangents al diagrama i es determina el segment $\overline{AB}$, figura 3.6, i amb l'expressió 15 s'obté el moment d'inèrcia del volant $I_{\text{vol}} = 1609 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$.

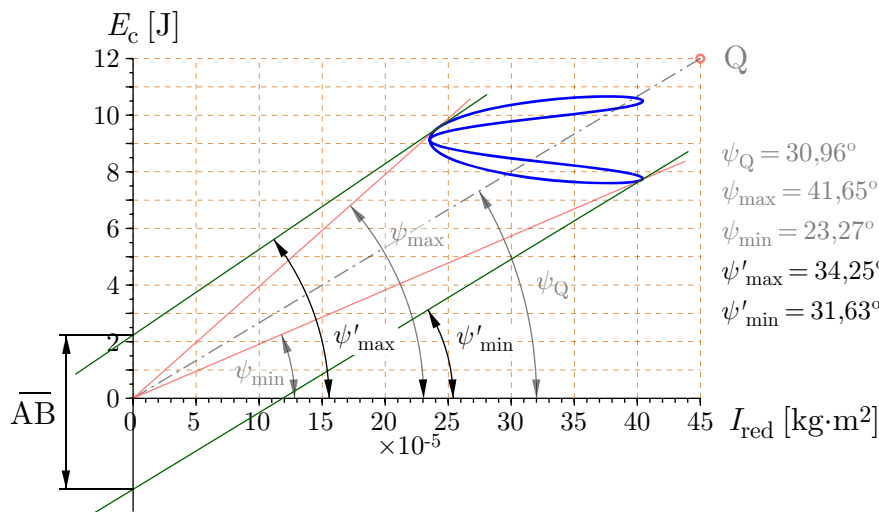


Figura 3.6 Diagrama de Wittenbauer. Disseny del volant.



Integrant de nou l'equació del moviment incrementant el moment d'inèrcia reduït amb el moment d'inèrcia del volant calculat, $I'_{\text{red}}(\varphi) = I_{\text{red}}(\varphi) + I_{\text{vol}}$ i modificant les condicions inicials a $\varphi_0 = 0, \omega_0 = 235 \text{ rad/s}$ per tal d'obtenir la mateixa $\omega_{\text{mit}} = 240,0 \text{ rad/s}$, s'obté el gràfic de la velocitat angular de la figura 3.7, on s'observa que amb el volant

$$\omega_{\text{max}} = 248,2 \text{ rad/s} \quad \omega_{\text{min}} = 234,1 \text{ rad/s} \quad \delta = 0,059$$

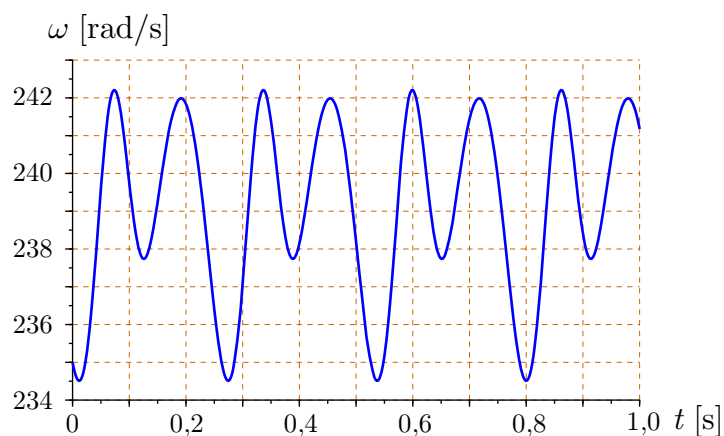


Figura 3.7 Velocitat angular amb volant i partint de $\varphi_0 = 0, \omega_0 = 235 \text{ rad/s}$.

Bibliografia

I. I. Artobolevski. Théorie des Mécanismes et des Machines. Moscou. Editions MIR , 1977.

G. G. Baránov. Curso de la Teoría de Mecanismos i Máquinas. Moscou. Ediciones MIR, 1979.

S. Cardona, D. Clos. Teoria de Màquines. Barcelona. Ed. UPC. 2008.



Exercicis

EXERCICI 4

Una punxonadora d'excèntrica ha de realitzar 3 operacions per s i cada operació de punxonament requereix 80 J i es realitza en una petita fracció del cicle de funcionament. Determineu el moment d'inèrcia del volant necessari per tal de garantir un grau d'irregularitat inferior al 2%.

Quan la màquina funciona en règim permanent amb el volant dissenyat es desconnecta el motor; quantes operacions farà abans d'aturar-se i quant temps tardarà en fer-ho?

Solució

Amb les hipòtesis d'inèrcia sensiblement constant i temps d'operació i resistències passives negligibles es té:

$$I_{\text{vol}} = 11,26 \text{ kg}\cdot\text{m}^2; \text{ 25 operacions; } 14,07 \text{ s.}$$

EXERCICI 5

L'accionament d'un generador li subministra a través d'un eix de transmissió un pols de parell a cada volta de l'eix. El pols és rectangular de durada 90° i alçada $T_{\text{mot}} = 200 \text{ N}\cdot\text{m}$. El debanat del generador crea un parell resistent constant a l'eix tal que el règim de funcionament és estacionari amb una velocitat mitjana $n_{\text{mit}} = 1500 \text{ min}^{-1}$. El moment d'inèrcia del rotor del generador és $I_G = 0,05 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

A fi de reduir la irregularitat de la marxa i els esforços màxims en l'eix de transmissió s'incorpora un volant de moment d'inèrcia I_{vol} en l'extrem de l'accionament d'aquest eix. Determineu:

- El moment d'inèrcia del volant per aconseguir un grau d'irregularitat $\delta_a = 0,05$.
- El parell mitjà $T_{\text{e mit}}$ a l'eix de transmissió.
- El parell $T_e(\varphi)$ a l'eix de transmissió i dibuixeu-lo.

Solució

a) $I_{\text{vol}} = 0,1410 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

b) $T_{\text{e mit}} = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$



