Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Vibracions Mecàniques

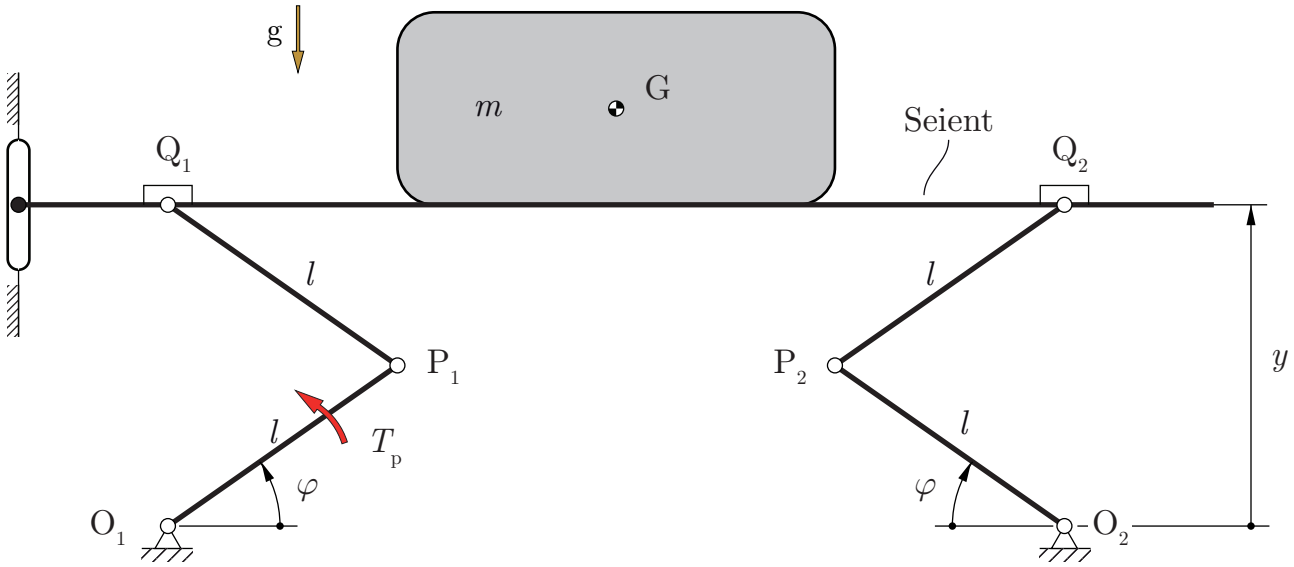
Exàmens Curs 2023-2024

Lluïsa Jordi

Departament d'Enginyeria Mecànica

- Contingut del sobre: enunciat, 2 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- Per realitzar l'exercici es disposa d'**una hora i mitja**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els blancs en el sobre.

Exercici



$l = 150$ mm	$m = 80$ kg	$k = 100$ N m/rad	
$c = 5$ N m/(rad/s)	$\varphi_0 = 0{,}8$ rad	$T_p = 5$ N m	$f = 2$ Hz

Una empresa desitja treure al mercat un nou model de tamboret que autoreguli l'alçada del seient quan l'usuari s'hagi identificat. Per aconseguir-ho realitza diversos assajos de verificació.

El model de tamboret ideat correspon a l'esquema de la figura, que incorpora dues molles torsionals, de constant k cadascuna i que estan disteses per a l'angle φ_0, i dos amortidors torsionals, de constant c cadascun, situats en les unions P_1 i P_2.

El sistema de transmissió entre la barra O_1P_1 i la barra O_2P_2 (no mostrat a la figura) garanteix que, en tot instant, l'orientació d'ambdues barres respecte l'horitzontal és la mateixa.

El guiatge del seient a través d'un piu, que llisca sense frec, en una guia fixa a l'estructura del tamboret garanteix el paral·lelisme del seient respecte O_1O_2.

Les masses de totes les barres es consideren negligibles, excepte la del seient. La massa del seient i la de la persona representen una massa total m.

Si es pren φ com a coordenada per realitzar l'estudi vibratori del sistema tamboret + usuari, determineu:

a) L'energia cinètica del sistema E_{c}.

b) L'energia potencial del sistema E_{p}.

c) L'angle φ_{eq} d'equilibri.

Determineu, entorn de φ_{eq}:

d) La freqüència pròpia de vibració f_0.

e) La raó d'esmorteïment ζ.

Un dels assajos de verificació simula la situació en la qual el motor, no representat a la figura, que controla la rotació de la barra $\mathrm{O_1P_1}$ realitza un parell $T(t) = T_{\mathrm{p}} \cos(2\,\pi\, f\, t)$. En aquesta situació d'assaig:

f) Representeu esquemàticament el sistema linealitzat.

g) Determineu la funció de resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(\omega)$ si es pren com a excitació el parell $\boldsymbol{T}(\omega)$ i com a sortida $\boldsymbol{\varphi}(\omega)$.

h) Determineu l'amplitud de la vibració del conjunt seient + persona, y_{p}, quan es troba sotmès a aquesta excitació.

Solució Exercici

a) L'energia cinètica E_c està associada al moviment del conjunt seient + persona de massa total m. Tenint en compte que la coordenada que s'empra és φ, cal relacionar la velocitat vertical $\dot{y}$ amb $\dot{\varphi}$.

$$\left.\begin{array}{l} E_c = \dfrac{1}{2} m \dot{y}^2 \\ y = h + 2\,l \sin\varphi \;\rightarrow\; \dot{y} = 2\,l\,\dot{\varphi}\cos\varphi \end{array}\right\} \rightarrow E_c = \frac{1}{2} 4\,m\,l^2 \cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 = 2\,m\,l^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2.$$

b) L'energia potencial E_p està associada al pes del conjunt seient + persona i a les dues molles torsionals. Si es pren com a origen de l'energia potencial la configuració en la qual les molles es troben disteses es pot escriure:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{p pes}} = m\,g\,2\,l\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right) \\ E_{\text{p molles}} = 2\,\dfrac{1}{2}\,k\left(2\varphi - 2\varphi_0\right)^2 \end{array}\right\} \rightarrow\; E_p = 2\,l\,m\,g\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right) + 4\,k\left(\varphi - \varphi_0\right)^2.$$

c) En els sistemes conservatius la configuració d'equilibri entorn de la qual es pot vibrar, i en els no conservatius on la potència de les forces no conservatives és nul·la en aquesta configuració, coincideix amb un mínim de l'energia potencial. Així doncs:

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi_{eq}} = 2\,m\,g\,l\cos\varphi + 8\,k\left(\varphi - \varphi_0\right)\Big|_{\varphi_{eq}} = 0.$$

La resolució d'aquesta equació porta a $\varphi_{eq} = 0{,}5491$ rad $= 31{,}46^{\circ}$.

d) Per tal de determinar la freqüència pròpia f_0 entorn de φ_{eq} cal conèixer el valor de la inèrcia reduïda, I_{red}, i de la rigidesa reduïda, k_{red}, entorn d'aquesta configuració.

El valor de I_{red} s'obté a partir de l'expressió de l'energia cinètica, tenint en compte que.

$$E_c = \frac{1}{2} 4\,m\,l^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I_{red}\,\dot{\varphi}^2 \rightarrow\; I_{red}\Big|_{\varphi_{eq}} = 4\,m\,l^2\cos^2\varphi_{eq} = 5{,}239\ \mathrm{kg\cdot m^2}.$$

El valor de k_{red} s'obté a partir de l'energia potencial, tenint en compte que:

$$k_{red} = \frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\varphi^2} = 8\,k - 2\,m\,g\,l\sin\varphi \rightarrow k_{red}\Big|_{\varphi_{eq}} = 8\,k - 2\,m\,g\,l\sin\varphi_{eq} = 677{,}2\ \mathrm{N{\cdot}m/rad}.$$

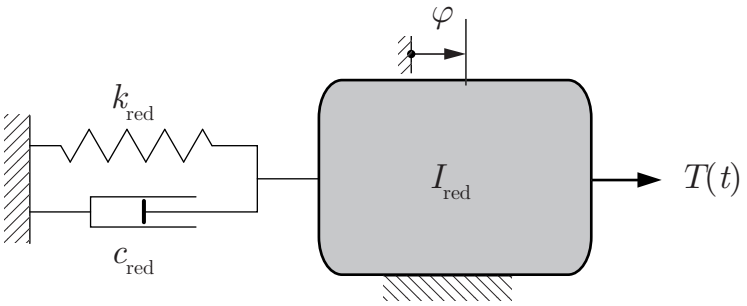
Finalment, la freqüència pròpia és: $f_0 = \dfrac{1}{2\,\pi}\sqrt{\dfrac{k_{\text{red}}}{I_{\text{red}}}} = 1,809$ Hz.

e) Per determinar la raó d'esmorteïment ζ entorn de φ_{eq} cal conèixer el valor de c_{red}. Aquest valor s'obté a partir de la potència de les forces no conservatives associades als amortidors torsionals:

$$P_{\text{nc}} = -2\cdot\left(c\,2\dot{\varphi}\right)\cdot 2\,\dot{\varphi} = -8\,c\,\dot{\varphi}^2 \rightarrow \frac{P_{\text{nc}}}{\dot{\varphi}} = -8\,c\,\dot{\varphi} \;\rightarrow\; c_{\text{red}} = 8\,c.$$

En conseqüència, la raó d'esmorteïment és: $\zeta = \dfrac{c_{\text{red}}}{2\sqrt{k_{\text{red}}\cdot I_{\text{red}}}} = 0,3358.$

f) Tenint en compte que el parell alternatiu actua sobre l'angle φ, el sistema linealitzat entorn de la configuració d'equilibri es correspon amb el de l'esquema de la figura:



g) La funció de resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(\omega)$ si es pren com a excitació el parell $\boldsymbol{T}(\omega)$ i com a sortida $\boldsymbol{\varphi}(\omega)$ es determina a partir de realitzar la Transformada de Fourier de l'equació del moviment del sistema linealitzat entorn de la configuració d'equilibri. L'equació del moviment del sistema linealitzat és:

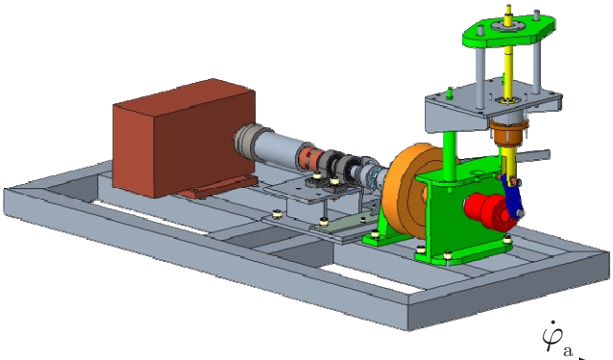
$$I_{\text{red}}\,\ddot{\varphi} + c_{\text{red}}\,\dot{\varphi} + k_{\text{red}}\,\varphi = T(t)$$

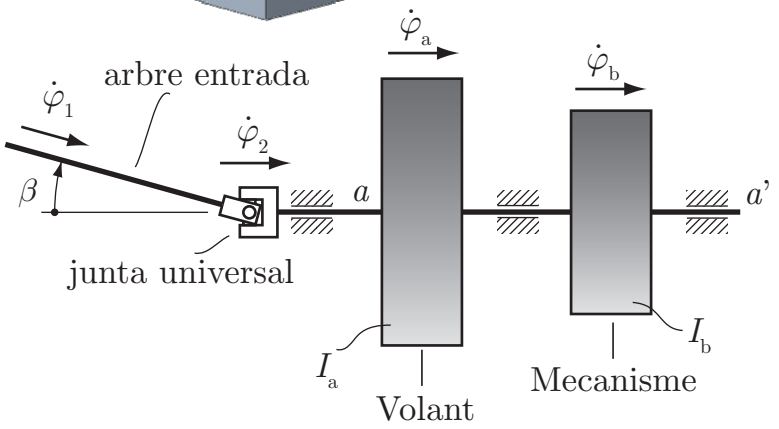
Per tant, aplicant la Transformada de Fourier s'obté:

$$\left(-I_{\text{red}}\,\omega^2 + \mathrm{j}\,c_{\text{red}}\,\omega + k_{\text{red}}\right)\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{T} \;\rightarrow\; \boldsymbol{H}(\omega) = \frac{\boldsymbol{\varphi}(\omega)}{\boldsymbol{T}(\omega)} = \frac{1}{k_{\text{red}} - I_{\text{red}}\,\omega^2 + \mathrm{j}\,c_{\text{red}}\,\omega}.$$

h) A partir del mòdul de la funció de resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(\omega)$ avaluada a la freqüència d'excitació f, es pot determinar l'amplitud de la resposta φ_{p} i en conseqüència es determina l'amplitud y_{p} a partir de l'expressió trobada a l'apartat *a*): $y_{\text{p}} = 2\,l\sin\varphi_{\text{p}} = 2\,l\sin\left(T_{\text{p}}\,|\boldsymbol{H}(f)|\right) = 2{,}859$ mm.

- Contingut del sobre: enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material**.
- La durada de l'examen és: **una hora per al test** i de **dues hores per al problema**.
- Material escrit: només es pot disposar d'**un full A4 manuscrit original**.
- Per entregar introduïu els fulls quadriculats i el material aprofitable en el sobre.





I_a=2,5 kg·m^2
I_b=0,5 kg·m^2
k_a=26 kN·m/rad
c_a=20 N·m/(rad/s)
n=300 min^{-1}
k_b=20 kN·m/rad
c_b=10 N·m/(rad/s)

La figura mostra el disseny 3 D i un esquema simplificat d'un banc d'assaig per analitzar pèrdues energètiques de diversos mecanismes.

En un dels estudis, s'analitza un mecanisme que té una manovella accionada per un motor, a través d'un arbre (a-a') en el qual hi ha un volant d'inèrcia.

Per raons constructives, els dos arbres no estan alineats i entre ells hi ha una junta universal, amb la qual cosa les velocitats dels dos arbres no són iguals.

La relació de la junta universal depèn de l'angle β que formen els dos arbres. En el cas que s'estudia amb un angle $\beta = 15^{\circ}$, la relació ve donada per:

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 \left(a + b \cos\left(2\,\dot{\varphi}_1\, t \right) \right), \text{ amb } a = 1 \text{ i } b = 34,66 \cdot 10^{-3}.$$

La inèrcia reduïda, a la rotació de l'arbre a-a', del mecanisme analitzat és equivalent a I_b, la rigidesa a torsió del tram d'arbre que uneix la junta universal amb el volant és k_a i l'esmorteïment a torsió en aquest tram és equivalent a c_a.

Suggeriment: feu un esquema de blocs per a cada situació que es planteja.

Si la rigidesa del tram d'arbre *a*-*a*' que uneix el volant i el mecanisme analitzat és prou gran per considerar que la unió entre ells és rígida, determineu:

a) La freqüència pròpia f_0 i la raó d'esmorteïment ζ.

b) La velocitat angular $\dot{\varphi}_\mathrm{a}$ quan l'arbre d'entrada gira a $n = 300$ min^{-1} a velocitat constant (Fixeu-vos que l'excitació té dos components).

c) El valor de pic del parell de torsió, T_p, que suporta la junta universal en el règim estacionari de l'apartat anterior.

Si la rigidesa a torsió del tram d'arbre que uneix el volant i el mecanisme analitzat és k_b i l'esmorteïment a torsió en aquest tram és equivalent a c_b, determineu:

d) Les matrius d'inèrcia $\boldsymbol{M}$, de rigidesa $\boldsymbol{K}$ i d'esmorteïment $\boldsymbol{C}$ si es prenen com a coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = \{\varphi_\mathrm{a}, \varphi_\mathrm{b}\}^\mathrm{T}$.

e) Les freqüències pròpies f_{0i} i els modes propis $\boldsymbol{p}_i$ de vibració. Interpreteu els resultats.

f) L'esmorteïment modal ζ_i si es negligeix l'acoblament per esmorteïment.

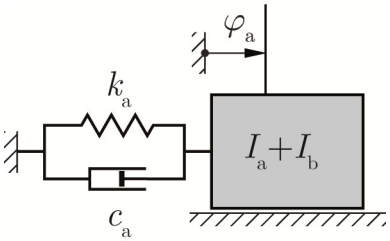
g) L'expressió de la matriu de resposta freqüencial, $\boldsymbol{H}(\omega)$, si es pren com a entrada el vector d'excitació $\boldsymbol{e} = \{T_\mathrm{a}, T_\mathrm{b}\}^\mathrm{T}$, on T_a i T_b són parells exteriors que actuen sobre el volant i el mecanisme, i com a sortida el vector de coordenades generalitzades $\boldsymbol{q}$.

h) El valor de l'amplitud de les velocitats angulars $\dot{\varphi}_\mathrm{ap}$ i $\dot{\varphi}_\mathrm{bp}$ si l'arbre d'entrada gira com es descriu a l'apartat *b*).

i) El valor de pic del parell de torsió, $T_\mathrm{ab\,p}$, en el tram de l'arbre *a*-*a*' que uneix el volant i el mecanisme analitzat en el règim estacionari de l'apartat anterior.

Solució

a) Si la unió entre el volant i el mecanisme és rígida el mecanisme equivalent és un mecanisme d'un grau de llibertat que es pot esquematitzar tal com mostra la figura:



Per tant, la freqüència pròpia i la raó d'esmorteïment són:

$$f_0 = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k_a}{I_a + I_b}} = 14,82 \text{ Hz} \qquad \text{i} \qquad \zeta = \frac{c_a}{2\sqrt{k_a\left(I_a + I_b\right)}} = 0,03581.$$

b) La velocitat angular $\dot{\varphi}_2$ després de la junta universal és:

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1\left(a + b\cos\left(2\,\dot{\varphi}_1\,t\right)\right), \text{ amb } \dot{\varphi}_1 = \frac{n\,2\,\pi}{60} \text{ i } 2\,\dot{\varphi}_1 = 2\cdot 5\cdot 2\,\pi = 2\,\pi\cdot 10.$$

Aquesta velocitat representa una transmissió de vibracions del medi cap al receptor (excitació per la base) de dos components: un de continu ($f_{e1} = 0$ Hz) d'amplitud $a\,\dot{\varphi}_1$ i un d'alternatiu ($f_{e2} = 10$ Hz) d'amplitud $b\,\dot{\varphi}_1$.

La velocitat angular $\dot{\varphi}_a$ es pot obtenir a partir del factor de transmissió avaluat a cadascuna de les freqüències d'excitació:

$$FT = \frac{\dot{\varphi}_{ap}}{\dot{\varphi}_{2p}}\frac{\sqrt{1+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^2+\left(2\,\zeta\,\rho\right)^2}} \quad \rightarrow \quad FT(0\,\text{Hz}) = 1 \quad FT(10\,\text{Hz}) = 1,832$$

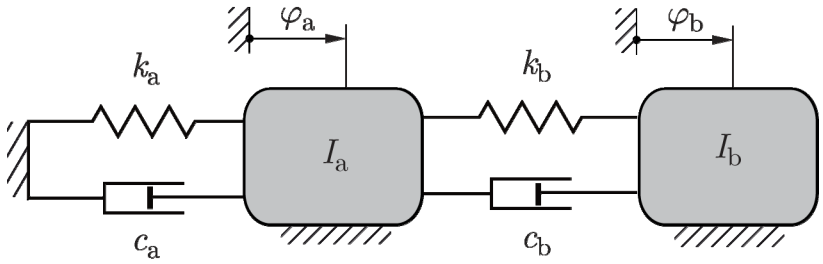
Per tant:

$$\dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_1\left(a\,FT(0\,\text{Hz}) + b\,FT(10\,\text{Hz})\cos\left(2\,\dot{\varphi}_1\,t\right)\right)$$
$$\dot{\varphi}_a = 31,42\left(1 + 63,48\cdot 10^{-3}\cos\left(2\,\pi\,10\,t\right)\right) \text{ rad/s}.$$

c) El parell de torsió T_p es pot calcular a partir de l'angle de torsió entre els extrems del tram d'arbre *a*-*a*' que hi ha entre la junta i el volant.

$$T_p = k_a\left(\varphi_{ap} - \varphi_{2p}\right) = k_a\left(\dot{\varphi}_{ap} - \dot{\varphi}_{2p}\right)\frac{1}{2\,\pi\,f_2} = 374,7 \text{ N·m}.$$

d) Si el tram d'arbre que uneix el volant i el mecanisme no és rígid el mecanisme equivalent és un mecanisme de dos graus de llibertat que es pot esquematitzar tal com mostra la figura:



Les matrius d'inèrcia, de rigidesa i d'esmorteïment es poden trobar, per exemple, a partir de les expressions de l'energia cinètica, de l'energia potencial i de la potència de les forces no conservatives.

Es pren com a vector de coordenades generalitzades, tal com suggereix l'enunciat, $\boldsymbol{q} = \left\{\varphi_a, \varphi_b\right\}^T$.

L'energia cinètica E_c del sistema és la suma de l'energia cinètica del volant d'inèrcia més la del mecanisme analitzat.

$$E_c = E_{c\,\text{volant}} + E_{c\,\text{mecanisme}} = \frac{1}{2} I_a \dot{\varphi}_a^2 + \frac{1}{2} I_b \dot{\varphi}_b^2$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & I_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \text{kg·m}^2$$

L'energia potencial E_p és l'associada a les rígides a torsió dels trams d'arbre entre la junta universal i el volant, i entre el volant i el mecanisme.

$$E_p = \frac{1}{2} k_a \varphi_a^2 + \frac{1}{2} k_b \left(\varphi_b - \varphi_a\right)^2$$

Els elements de la matriu de rigidesa $\boldsymbol{K}$ són: $k_{ij} = \left.\dfrac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \, \partial q_j}\right|_{\boldsymbol{q}_{eq}}$

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} k_a + k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & -20 \\ -20 & 20 \end{pmatrix} \cdot 10^3 \text{ N·m/rad}$$

La matriu d'esmorteïment $\boldsymbol{C}$ s'obté de l'expressió de la potència de les forces no conservatives, $P_{nc} = \sum_i Q_i \, \dot{q}_i$ on Q_i és la força generalitzada associada a la

coordenada q_i i $c_{ij} = -\partial Q_i \big/ \partial \dot{q}_j \Big|_{\boldsymbol{q}_{\mathrm{eq}}, \dot{\boldsymbol{q}}=0}$. En aquest cas:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{\mathrm{a}} + c_{\mathrm{b}} & -c_{\mathrm{b}} \\ -c_{\mathrm{b}} & c_{\mathrm{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} \mathrm{N{\cdot}m/(rad/s)}$$

Amb les matrius $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{C}$ l'equació matricial del moviment lliure a l'entorn de la configuració d'equilibri és

$$\boldsymbol{M}\ \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\ \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \qquad [1]$$

e) Les freqüències pròpies f_{0i} i els modes propis $\boldsymbol{p}_i$ s'obtenen diagonalitzant la matriu dinàmica $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$. En funció dels valors propis λ_i, les freqüències pròpies són: $f_{0i} = \sqrt{\lambda_i} \big/ (2\pi)$. La forma de vibrar associada al mode propi de freqüència pròpia f_{0i} queda descrita pel vector propi $\boldsymbol{p}_i$ associat al valor propi λ_i.

$$f_{01} = \sqrt{\lambda_1} \big/ (2\,\pi) = 35{,}62 \text{ Hz} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p}_1 = \left\{1,\ -3{,}962\right\}^{\mathrm{T}} \text{ rad}$$
$$f_{02} = \sqrt{\lambda_2} \big/ (2\,\pi) = 14{,}50 \text{ Hz} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p}_2 = \left\{1,\ 1{,}262\ \right\}^{\mathrm{T}} \text{ rad}$$

El primer mode propi vibratori descriu un moviment harmònic de freqüència 35,62 Hz en el qual el volant i la inèrcia reduïda del mecanisme es mouen en contrafase i amb una relació d'amplituds de $|\varphi_{\mathrm{a}}/\varphi_{\mathrm{b}}| = 0{,}2524$.

El segon mode propi vibratori descriu un moviment harmònic de freqüència 15,50 Hz en el qual el volant i la inèrcia reduïda del mecanisme es mouen en fase i amb una relació d'amplituds de $|\varphi_{\mathrm{a}}/\varphi_{\mathrm{b}}| = 0{,}7924$.

En ambdós modes propis, el moviment del volant és inferior al moviment de la inèrcia reduïda del mecanisme, cosa lògica si es té en compte la relació d'inèrcies dels dos elements.

f) Si es pren la matriu $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}$, que té per columnes els vectors propis de la matriu dinàmica $\boldsymbol{D}$, i a l'equació matricial del moviment lliure [1] es fa el canvi a coordenades modals, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{P}\ \xi$, i es premultiplica per $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$, s'obté:

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P}\ \ddot{\xi} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}\ \dot{\xi} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P}\ \xi = \boldsymbol{0}$$

Les matrius $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P}$ són diagonals.

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0{,}6198 & 0 \\ 0 & 1{,}271 \end{pmatrix} \text{ Unitats SI}$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 31048,4 & 0 \\ 0 & 10558 \end{pmatrix} \quad \text{Unitats SI}$$

La matriu $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}$ només és diagonal en casos particulars com en el d'esmorteïment proporcional o esmorteïment de Rayleigh, on la matriu $\boldsymbol{C}$ és una combinació lineal d'$\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{K}$. En aquest cas

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 15,94 & -1,064 \\ -1,064 & 7,979 \end{pmatrix} \quad \text{Unitats SI}$$

Els termes diagonals de $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}$ descriuen l'esmorteïment directament associat a cada coordenada modal ξ_i, i per tant a cada mode propi. Amb aquestes consideracions, negligint l'acoblament per esmorteïment, la raó d'esmorteïment de cada mode és:

$$\zeta_i = \frac{\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}\right)_{ii}}{2\sqrt{\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{P}\right)_{ii}\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{P}\right)_{ii}}} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \zeta_1 = 0,05747 \\ \zeta_2 = 0,03443 \end{array}$$

En un sistema lliure, els modes propis descriuen moviments que ni la inèrcia ni la rigidesa del sistema acoblen o fan dependents. Els termes no diagonals de $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{P}$ són els causants de l'acoblament per esmorteïment dels modes propis.

g) Les equacions del moviment [1] corresponen al sistema lliure o autònom, sense elements que originen forces o parells funció del temps. L'efecte d'aquestes forces s'inclou en l'equació del moviment amb el vector d'excitació $\boldsymbol{e}$ que s'obté de l'expressió de la potència de les forces o parells que generen. $P = \sum_i Q_i\,\dot{q}_i$ on Q_i és la força generalitzada associada a la coordenada q_i i és la component e_i del vector d'excitació.

En aquest cas, el vector d'excitació ve donat per $\boldsymbol{e} = \left\{T_{\mathrm{a}}, T_{\mathrm{b}}\right\}^{\mathrm{T}}$ i l'equació matricial del moviment és

$$\boldsymbol{M}\ \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\ \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{e} \qquad [2]$$

La matriu de resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(\omega)$ prenent com a entrada el vector d'excitació $\boldsymbol{e}$ i com a sortida el moviment descrit amb el vector $\boldsymbol{q}$ s'obté fent la transformada de Fourier de l'equació matricial del moviment [2].

$$\left(-\boldsymbol{M}\,\omega^2+\boldsymbol{C}\,\omega\,\mathrm{j}+\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{H}\,(\omega)\,\boldsymbol{E}\quad\rightarrow\quad\boldsymbol{H}\,(\omega)=\left(-\boldsymbol{M}\,\omega^2+\boldsymbol{C}\,\omega\,\mathrm{j}+\boldsymbol{K}\right)^{-1} \qquad [3]$$

h) Si l'arbre d'entrada no està fixat i sobre els volants no actuen parells exteriors l'efecte del gir de l'arbre d'entrada es pot estudiar com si el vector d'excitació fos

$$\boldsymbol{e}=\left\{k_{\mathrm{a}}\,\varphi_2,\,0\right\}^{\mathrm{T}}$$

Per tant, a partir de les expressions [3]:

$$\dot{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{H}\left(\omega\right)\dot{\boldsymbol{E}}$$

En règim estacionari, el moviment alternatiu del volant i el mecanisme és: harmònic de la mateixa freqüència que l'excitació, d'amplitud igual a l'amplitud de l'excitació multiplicada pel mòdul de la resposta freqüencial a la freqüència d'excitació i desfasada respecte a l'excitació un angle igual a l'argument de la resposta freqüencial per a la freqüència d'excitació.

Anomenant $\boldsymbol{H}_{ij}$ les components de la matriu $\boldsymbol{H}(\omega)$, s'obté:

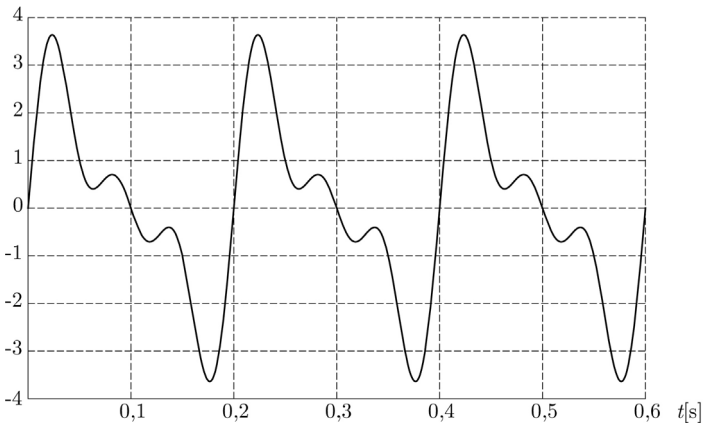
$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{H}_{11}(\omega)\,k_{\mathrm{a}}\,\dot{\boldsymbol{\varphi}}_2=\boldsymbol{H}_{11}(\omega)\,k_{\mathrm{a}}\,\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1\left(a\,\boldsymbol{H}_{11}(0)+b\,\boldsymbol{H}_{11}(2\,\pi\,10)\cos\left(2\,\dot{\varphi}_1\,t+\arg\left[\boldsymbol{H}_{11}\left(2\,\pi\,10\right)\right]\right)\right)$$
$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{H}_{21}(\omega)\,k_{\mathrm{a}}\,\dot{\boldsymbol{\varphi}}_2=\boldsymbol{H}_{21}(\omega)\,k_{\mathrm{a}}\,\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1\left(a\,\boldsymbol{H}_{21}(0)+b\,\boldsymbol{H}_{21}(2\,\pi\,10)\cos\left(2\,\dot{\varphi}_1\,t+\arg\left[\boldsymbol{H}_{21}\left(2\,\pi\,10\right)\right]\right)\right)$$

En resum

$$\dot{\varphi}_{\mathrm{ap}}=k_{\mathrm{a}}\,\dot{\varphi}_1\left(a\left|\boldsymbol{H}_{11}(0)\right|+b\left|\boldsymbol{H}_{11}(2\,\pi\,10)\right|\right)=33,44\ \mathrm{rad/s}$$
$$\dot{\varphi}_{\mathrm{bp}}=k_{\mathrm{a}}\,\dot{\varphi}_1\left(a\left|\boldsymbol{H}_{21}(0)\right|+b\left|\boldsymbol{H}_{21}(2\,\pi\,10)\right|\right)=33,66\ \mathrm{rad/s}$$

i) El parell de torsió T_{abp} es pot calcular a partir de l'angle de torsió entre els extrems d'aquest tram d'arbre:

$$T_{\mathrm{abp}}=k_{\mathrm{b}}\left(\varphi_{\mathrm{ap}}-\varphi_{\mathrm{bp}}\right)=k_{\mathrm{b}}\left|\dot{\varphi}_{\mathrm{ap}}-\dot{\varphi}_{\mathrm{bp}}\right|\frac{1}{2\,\pi\,f_2}=70,42\ \mathrm{N{\cdot}m}.$$



1 La figura mostra la vibració mesurada en un punt d'una màquina. L'anàlisi de Fourier d'aquesta vibració proporciona un espectre que conté les freqüències:

A 2 Hz

B 5 Hz

C 10 Hz i 15 Hz

D 5 Hz, 10 Hz i 15 Hz

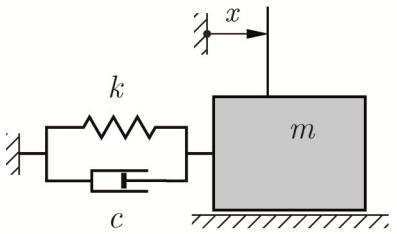
2 Un acceleròmetre, de sensibilitat $s_a = 100$ mV/g, proporciona un senyal, mesurat amb un voltímetre, de 40 mV de valor de RMS. Quin és el valor de pic de l'acceleració mesurada?

A 3,923 m/s^2

B 0,5657 m/s^2

C 5,548 m/s^2

D 4,657 m/s^2



$m = 5$ kg $\quad k = 10$ N/mm

$c = 50$ N/(m/s)

$F(t) = 100 \cos(2\,\pi\,15\,t)$ N

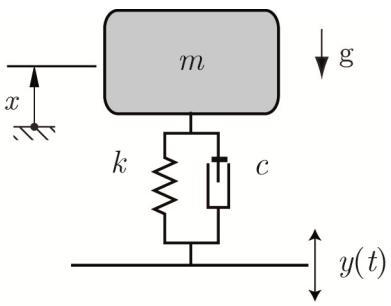
3 L'amplitud de vibració x_p en règim estacionari del sistema d'un grau de llibertat mostrat a la figura si se li aplica la força $F(t)$ indicada és:

A 2,290 mm

B 2,879 mm

C 2,303 mm

D 2,906 mm



$m = 50$ kg $\quad k = 2000$ N/m
$c = 100$ N/(m/s)
$y(t) = 10\cos(2\,\pi\,5\,t)$ mm

4 El sistema massa-molla-amortidor de la figura està muntat sobre una superfície que està sotmesa a la vibració harmònica indicada. L'amplitud x_p de la vibració de la massa en el règim estacionari és:

A 0,7848 mm

B 0,6392 mm

C 0,4275 mm

D 0,6381 mm

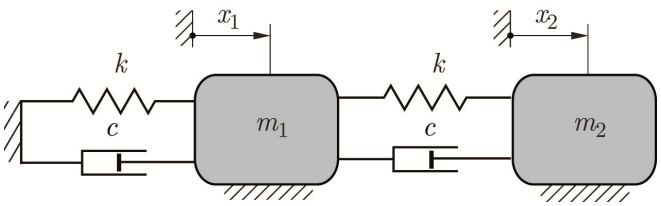
5 Quina de les següents afirmacions descriu el concepte de vibració autoexcitada d'un sistema?

A Es produeix quan un sistema és excitat per una força externa periòdica.

B Es manté gràcies a l'energia proporcionada per les condicions inicials del sistema, sense necessitat de forces externes.

C Es produeix en un sistema i depèn del moviment del propi sistema.

D Es produeix en un sistema sotmès a un nivell d'esmorteïment molt baix.



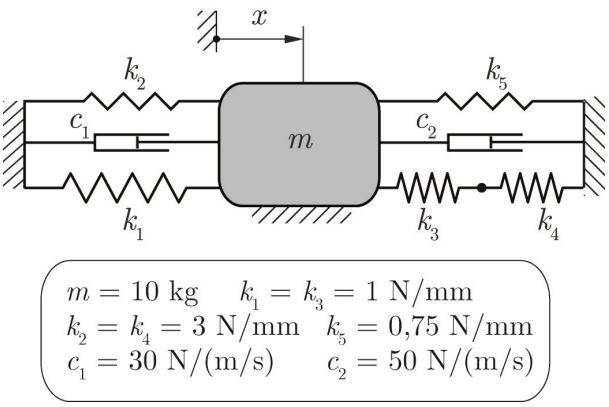
6 El sistema de 2 graus de llibertat de la figura està sotmès a vibracions forçades harmònicament. En el règim estacionari:

A Les respostes $\boldsymbol{X}_1$ i $\boldsymbol{X}_2$ són independents de sobre quin sòlid actua la força excitadora i de la freqüència de la força excitadora.

B Les respostes $\boldsymbol{X}_1$ i $\boldsymbol{X}_2$ depenen de sobre quin sòlid actua la força excitadora i de la freqüència de la força excitadora.

C Les respostes $\boldsymbol{X}_1$ i $\boldsymbol{X}_2$ són independents de sobre quin sòlid actua la força excitadora però depenen de la freqüència de la força excitadora.

D Les respostes $\boldsymbol{X}_1$ i $\boldsymbol{X}_2$ depenen de sobre quin sòlid actua la força excitadora però són independents de la freqüència de la força excitadora.



7 La freqüència pròpia f_0 i la raó de l'esmorteïment ζ del sistema de la figura són:

	f_0[Hz]	ζ
A	4,708	0,1352
B	0,9319	0,1601
C	4,708	0,0507
D	3,733	0,1706

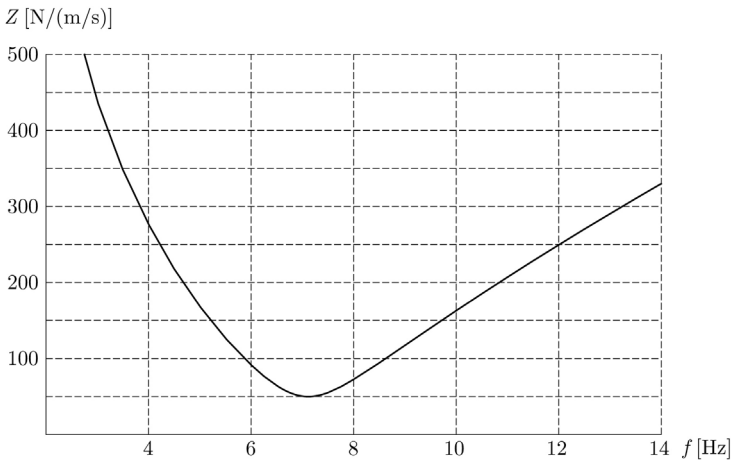
8 En un local, es desitja instal·lar un tipus de màquina que produeix un nivell de vibració, en valor eficaç, de 62 dB referits a 10^{-6} mm/s. En un punt del local no es pot superar un nivell de vibració, en valor eficaç, de 70 dB referits a 10^{-6} mm/s. Suposant que la vibració que produeix una màquina es descorrelada de la que produeixen les altres, quantes d'aquestes màquines s'hi podran instal·lar?

A 2

B 6

C 3

D 7



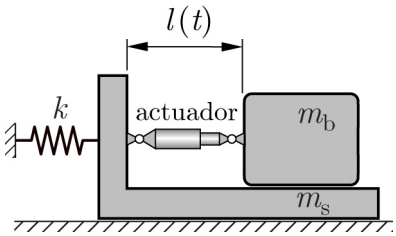
9 El gràfic de la figura mostra la impedància $Z(f)$ d'un sistema lineal d'un grau de llibertat. Quin és el valor del coeficient d'esmorteïment c del sistema?

A 50 N/(mm/s)

B 20 N/(mm/s)

C 50 N/(m/s)

D 20 N/(m/s)



10 En el sistema de la figura, la longitud de l'actuador varia de forma harmònica - $l(t) = l_0 + l_p \cos(2\,\pi\,f\,t)$. La freqüència de ressonància és:

A $\sqrt{k/\left(m_s + m_b\right)}\Big/\left(2\,\pi\right)$

B $\sqrt{k/m_b}\Big/\left(2\,\pi\right)$

C $\sqrt{k/\left(m_s + m_b\,l_p/l_0\right)}\Big/\left(2\,\pi\right)$

D $\sqrt{k/m_s}\Big/\left(2\,\pi\right)$

COMPROVEU QUE COINCIDEIX EL NÚMERO DE LA PERMUTACIÓ DEL TEST AMB EL NÚMERO DEL FULL DE MARQUES ÒPTIQUES.

Full de respostes

Vibracions Mecàniques

12 de juny de 2024

P	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1	D	A	B	B	A
2	C	D	C	C	B
3	B	A	A	B	C
4	A	D	D	D	B
5	C	B	D	C	A
6	B	C	A	D	D
7	D	C	A	D	D
8	B	C	C	A	C
9	C	B	B	A	D
10	A	B	B	A	C