Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Vibracions Mecàniques

Excitació arbitrària de sistemes lineals amb coeficients constants

Salvador Cardona

Lluïsa Jordi

Departament d'Enginyeria Mecànica

Excitació arbitrària de sistemes lineals amb coeficients constants

Per estudiar el comportament d'un sistema lineal amb coeficients constants cal resoldre el sistema d'equacions diferencials ordinàries lineals que descriu el seu comportament. Per facilitar la resolució d'aquests sistemes s'han posat a punt dues transformacions de funcions: la transformada de Laplace –TL– i la transformada de Fourier –TF–, cadascuna amb una transformació directa i una d'inversa que permet restituir la funció inicial. Aquestes transformades permeten l'algebrització d'expressions integro-diferencials.

En l'àmbit de les vibracions, les funcions descriuen usualment l'evolució temporal de magnituds físiques –desplaçament, força... –, sovint són experimentals i solen anomenar-se senyals. Els senyals experimentals rarament es poden expressar mitjançant funcions analítiques; aquest fet, junt amb la facilitat d'implementació numèrica i d'interpretació de la transformada de Fourier, fan que la transformada de Laplace quedi més lligada a l'estudi analític dels sistemes i les seves propietats – càlcul operacional– i la Transformada de Fourier s'associï a l'anàlisi de senyals i a l'estudi experimental de sistemes –anàlisi freqüencial o espectral.

La transformada de Laplace porta a les funcions de transferència $\boldsymbol{H}(s)$ del sistema i la transformada de Fourier porta a la resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(f)$ o $\boldsymbol{H}(\omega)$. Sovint s'escriuen amb simbologia de vector per posar de manifest que són funcions complexes.

1. Definicions

La **transformada de Laplace** transforma una funció $x(t)$ del temps, funció en el domini temporal, en una funció complexa $\boldsymbol{X}(s)$ de variable complexa s, i la seva inversa fa el pas contrari. La parella de transformades, directa i inversa, es defineixen com:

$$\boldsymbol{X}(s) = \mathrm{TL}[x(t)] = \int_0^\infty x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$x(t) = \mathrm{TL}^{-1}[\boldsymbol{X}(s)] = \frac{1}{2\,\pi\mathrm{j}}\int_{\alpha-\mathrm{j}\infty}^{\alpha+\mathrm{j}\infty} \boldsymbol{X}(s)\,\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s\,.$$

Per tal que existeixin, calen unes condicions que les funcions descriptives de l'evolució de les magnituds físiques, en principi, compleixen:

- Si tenen discontinuïtats, han de ser finites i en nombre finit, i
- Ha d'existir algun valor α tal que $\int_0^{\infty} |x(t)|\, \mathrm{e}^{-\alpha t} < \infty$.

La transformada inversa requereix una integral, en el pla complex, al llarg d'una línia paral·lela a l'eix imaginari que talla a l'eix real a Re[s] = α i que s'estén de –∞ a +∞. En molts casos, però, es pot emprar la transformada de Laplace sense haver de recórrer a l'ús d'aquesta integral de línia ja que, si es compleix el lema de Jordan, es pot substituir aquesta integral de línia per una integral en un contorn tancat que es pot avaluar mitjançant la teoria de residuus. De tota manera, aquest procés ofereix dificultats i en qualsevol cas redueix o inclús anul·la els avantatges operacionals associats a la transformada de Laplace si no es disposa d'una taula de funcions associades $x(t) \leftrightarrow \boldsymbol{X}(s) = \mathrm{TL}\left[x(t)\right]$ i es fa ús de les seves propietats.

La **transformada de Fourier** transforma una funció $x(t)$ del temps, funció en el domini temporal, en una funció complexa $\boldsymbol{X}(f)$ de la freqüència, funció en el domini freqüencial, i la seva inversa fa el pas contrari. La transformada de Fourier dóna lloc a l'anàlisi espectral o freqüencial de senyals. De fet, es pot considerar una extensió de les sèries de Fourier per a funcions periòdiques, $x(t) = x(t+T)$ essent $T \neq 0$ el període. Per a aquestes funcions cal recordar:

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\,\pi}{T} k\, t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\,\pi}{T} k\, t\right)\right) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{2\,\pi}{T} k\, t + \varphi_k\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\,\pi}{T} k\, t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\,\pi}{T} k\, t\right)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{2\,\pi}{T} k\, t + \varphi_k\right)$$

amb $a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) \cos\left(\frac{2\,\pi}{T} k\, t\right) \mathrm{d}t$, $b_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) \sin\left(\frac{2\,\pi}{T} k\, t\right) \mathrm{d}t$,

$$c_k = \sqrt{\left(a_k^2 + b_k^2\right)}, \quad \varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Per a un senyal $x(t)$ la transformada de Fourier i la seva inversa es defineixen com:

$$\boldsymbol{X}(f) = \boldsymbol{X}(\omega) = \mathrm{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\, \mathrm{d}t$$

$$x(t) = \mathrm{TF}^{-1}[\boldsymbol{X}(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{X}(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\, \mathrm{d}f\,.$$

La transformada de Fourier rep també el nom d'integral de Fourier i es pot obtenir a partir de la sèrie de Fourier fent tendir el període T a ∞, no amitjanant –dividint per

T– per a l'obtenció dels coeficients a_k i b_k i utilitzant la notació complexa per representar conjuntament el sinus i el cosinus.

Cal fer atenció a les diverses versions en la definició de la transformada de Fourier i que condueixen a expressions diferents de la presentada:

- Si la variable d'integració de la transformada inversa és ω en lloc de f aleshores apareix el factor $1/(2\pi)$ que pot quedar dividint la transformada inversa, la transformada directa o repartit entre ambdues en forma de $1/\sqrt{2\pi}$.
- La unitat imaginària pot representar-se com i o com j. En aquest resum, es pren j lligant amb el criteri dels vectors giratoris que giren en sentit antihorari ($\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{j}} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$).
- El signe de l'exponent en la transformada directa pot ser positiu, com en la definició presa, o negatiu. Aquest canvi de signe té com a conseqüència un canvi de signe de la part imaginària de la transformada.
- Aquestes variacions només afecten en el cas de quedar-se com a resultat de l'estudi la transformada directa de Fourier o una conseqüència d'aquesta, com per exemple la resposta freqüencial. Si es fan servir amb coherència ambdues transformades, per passar del domini temporal al freqüencial i tornar al temporal, no hi ha diferència de resultats.

Per tal que existeixin, també cal que els senyals compleixen unes determinades condicions:

- Si tenen discontinuïtats, han de ser finites i en nombre finit, i
- S'ha de complir que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ o $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x(t)\right)^2 \mathrm{d}t < \infty$.

La **potència d'un senyal** s'associa al seu quadrat, $P_x(t) = \left(x(t)\right)^2$, i la seva energia a la integral d'aquesta:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t)\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Això fa que, en principi, la integral de Fourier només sigui aplicable a funcions que descriuen transitoris d'energia finita.

Emprant la funció **impuls** o **delta de Dirac**, $\delta(t)$, la transformada de Fourier és aplicable a funcions periòdiques i quasiperiòdiques (superposició de funcions periòdiques de períodes que no són múltiples enters d'un mateix període fonamental, és a dir superposició de funcions periòdiques no harmòniques entre elles. Així per exemple, la funció $x(t)=(\cos 10t+\cos 20t)+(\cos 10\pi t+\cos 20\pi t)$ és quasiperiòdica, superposició de dues funcions de períodes respectius $T_1=\pi/5$ s i $T_2=1/5$ s). Cal recordar que la funció delta de Dirac $\delta(t)$ es defineix com:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \text{ i } \delta(t)=0\ \forall t \neq 0\,.$$

Aquesta funció, que és la derivada generalitzada de la funció graó unitari, no és una vertadera funció en el sentit matemàtic usual ja que no està definida per a cada valor de t. S'utilitza freqüentment per representar distribucions.

La **transformada Discreta de Fourier** té entitat pròpia en l'estudi de senyals discretitzats en el temps, mostrejats a intervals regulars de temps i descrits mitjançant una sèrie de N valors i es pot considerar una aproximació numèrica de la transformada (contínua) de Fourier. Es defineix com:

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} x_r e^{-\mathrm{j}2\pi(k-1)(r-1)/N} \qquad k=1,\ldots,N$$

$$x_r = \sum_{k=1}^{N} X_k e^{\mathrm{j}2\pi(k-1)(r-1)/N} \qquad r=1,\ldots,N\,.$$

L'any 1965 J.W. Cooley i J.W. Tukey van publicar l'algorisme de la Transformada Ràpida de Fourier –FFT– per al càlcul numèric de la transformada Discreta de Fourier. Aquest algorisme redueix el nombre d'operacions respecte al càlcul directe de les expressions anteriors. Així, si N és una potència entera de 2 el nombre d'operacions passa de ser proporcional a N^2 a ser proporcional a $N\log_2 N$. Per exemple, si $N=2^{10}$ la relació en el nombre d'operacions és $N/\log_2 N = 102,4$.

Aquest algorisme ha suposat una revolució en l'estudi, sobretot experimental, de les vibracions, que és l'estudi dels sistemes lineals, i en l'anàlisi de senyals. És encara l'algorisme més utilitzat en el processat digital de senyals –DSP–. Gràcies a aquest algorisme (i a l'augment de les potències de càlcul), s'ha avançat i assolit un alt nivell en tècniques com el manteniment preventiu-predictiu de màquines i instal·lacions, on es preveu quan una màquina pot fallar i així poder programar el seu manteniment o la seva reparació, de manera que el perill i la incidència econòmica siguin mínims.

En l'àmbit de les vibracions **algunes transformades de Fourier interessants** són:

$$\mathrm{TF}[\cos(2\pi f_1 t)] = (1/2)\left[\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)\right]$$

$$\mathrm{TF}[\sin(2\pi f_1 t)] = (1/2)\left[-\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)\right]\,\mathrm{j}$$

$$\mathrm{TF}[\cos(2\pi f_1 t + \varphi)] = (1/2)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\delta(f - f_1) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\delta(f + f_1)\right]$$

$$\mathrm{TF}[\delta(t)]=1$$

2. Relació entre les Transformades de Laplace i de Fourier

De manera formal es passa de la transformada de Laplace a la de Fourier amb la substitució $s \leftrightarrow \mathrm{j}\omega$, però de fet hi ha diferències profundes en la seva utilització acurada: límits de les integrals i condicions d'existència.

- Quan la transformació directa de Fourier és possible i $x(t) = 0\ \forall t < 0$, aquesta coincideix amb la de Laplace simplement substituint s per j ω.
- Si $x(t)$ s'anul·la per a valors de $t \le t_0$ (amb t_0 positiu o negatiu) i es compleix la condició de convergència de la transformada directa de Fourier aleshores:

  $$\boldsymbol{X}(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{TF}[x(t - t_0)]$$

- Si $x(t)$ no s'anul·la per a tots els valors de $t < t_0$, amb t_0 negatiu, però es compleix la condició de convergència de la transformada directa de Fourier es pot procedir de la següent forma:

  $$\boldsymbol{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\,.$$

  Fent primer el canvi $t = -\tau$ en el segon sumand i, a continuació, els canvis $\mathrm{j}\,\omega = s$ i $-\mathrm{j}\,\omega = s'$

  $$\boldsymbol{X}(\omega) = \int_0^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} x(-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau = \int_0^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} x(-\tau)\mathrm{e}^{-s'\tau}\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{X}_t(s = \mathrm{j}\omega) + \boldsymbol{X}_{-\tau}(s' = -\mathrm{j}\omega).$$

  Així doncs, $\boldsymbol{X}(\omega)$ es pot determinar com suma de la transformada de Laplace, amb s substituïda per j ω, de $x(t)$ suposada nul·la per a $t < 0$ i de la transformada de Laplace, amb s' substituïda per –j ω, de $x(-\tau)$ suposada nul·la per a $\tau < 0$.

Per a un bon nombre de funcions analítiques, ambdues transformades es poden trobar per inspecció directa a partir de taules de transformades de funcions més o menys elementals i, si cal, aplicant les propietats d'aquestes transformades.

3. Propietats i aplicació de les transformades

En ambdues transformades, les dues propietats bàsiques per a la seva utilització en la resolució de sistemes lineals d'equacions diferencials ordinàries (EDO) amb coeficients constants són:

Derivació: $\mathrm{TF}[x(t)] = \boldsymbol{X}(\omega) \quad \rightarrow \quad \mathrm{TF}[\dot{x}(t)] = \mathrm{j}\omega\boldsymbol{X}(\omega)$

$$\mathrm{TL}[x(t)] = \boldsymbol{X}(s) \quad \rightarrow \quad \mathrm{TL}[\dot{x}(t)] = s\,\boldsymbol{X}(s) - x(0)$$

Linealitat: $\mathrm{TF}[x(t) + y(t)] = \mathrm{TF}[x(t)] + \mathrm{TF}[y(t)]; \qquad \mathrm{TF}[a\,x(t)] = a\,\mathrm{TF}[x(t)]$

$$\mathrm{TL}[x(t) + y(t)] = \mathrm{TL}[x(t)] + \mathrm{TL}[y(t)]; \qquad \mathrm{TL}[a\,x(t)] = a\,\mathrm{TL}[x(t)]$$

Un sistema amb una sortida, o resposta, $x(t)$ que respon a una entrada, o excitació, $y(t)$ es diu que és lineal amb coeficients constants si ambdues funcions estan relacionades per una equació diferencial lineal amb coeficients constants de la forma:

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_m \frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + b_0 x$$

Cal indicar que si els coeficients fossin funció de t el sistema també seria lineal, i es compliria el principi de la superposició, però aleshores el comportament del sistema i el seu estudi serian diferents, i més complicats.

Se suposa que el sistema descrit per l'equació anterior és passiu, per al qual si no hi ha entrada, després d'un temps suficientment llarg, la sortida serà negligible; en definitiva que, l'esmorteïment és positiu i els transitoris s'esvaeixen.

Admetent l'existència de les transformades de Fourier de $x(t)$ i de $y(t)$, es pot aplicar aquesta transformació als dos membres de l'equació diferencial i, fent ús de les propietats de derivació i de linealitat vistes, s'obté:

$$\left(a_n(\mathrm{j}\omega)^n + \cdots + a_1(\mathrm{j}\omega) + a_0\right)\boldsymbol{Y}(\omega) = \left(b_m(\mathrm{j}\omega)^m + \cdots + b_1(\mathrm{j}\omega) + b_0\right)\boldsymbol{X}(\omega)$$

Al qüocient entre la transformada de Fourier de la resposta o sortida $\boldsymbol{X}(\omega)$ i la transformada de Fourier de l'entrada o excitació $\boldsymbol{Y}(\omega)$ se l'anomena funció de resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(\omega)$:

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{\boldsymbol{X}(\omega)}{\boldsymbol{Y}(\omega)} = \frac{a_n(\mathrm{j}\omega)^n + \cdots + a_1(\mathrm{j}\omega) + a_0}{b_m(\mathrm{j}\omega)^m + \cdots + b_1(\mathrm{j}\omega) + b_0}.$$

De manera semblant, si s'utilitza la transformada de Laplace suposant condicions inicials nul·les s'obté la funció de transferència $\boldsymbol{H}(s)$:

$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{\boldsymbol{X}(s)}{\boldsymbol{Y}(s)} = \frac{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}.$$

4. Exemples de funcions de resposta freqüencial

Exemple 1. Sistema d'un grau de llibertat excitat.

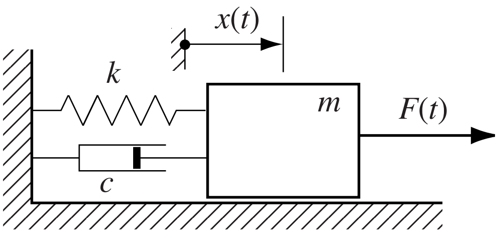

Figura 1

L'equació del moviment del sistema de la figura 1 és:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

L'aplicació de la transformada de Fourier a aquesta equació condueix a:

$$\mathrm{TF}[m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t)] = \mathrm{TF}[F(t)]$$

$$\left(-m\omega^2 + c\omega\,\mathrm{j} + k\right)\boldsymbol{X}(\omega) = \boldsymbol{F}(\omega).$$

D'on, prenent la força $F(t)$ com a excitació i el desplaçament $x(t)$ com a resposta, s'obté la funció de resposta freqüencial $\boldsymbol{H}(\omega)$:

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{\boldsymbol{X}(\omega)}{\boldsymbol{F}(\omega)} = \frac{1}{-m\omega^2 + c\omega\,\mathrm{j} + k} = \frac{1}{k}\frac{1}{\left(1-\rho^2\right) + 2\zeta\rho\mathrm{j}} \quad \text{amb}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}; \quad \rho = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Si es vol prendre la velocitat $v(t)$ com a resposta només cal tenir en compte que, com que la velocitat és la derivada del desplaçament

$$\boldsymbol{V}(\omega) = \boldsymbol{X}(\omega)\omega\mathrm{j} \quad \text{i per tant} \quad \boldsymbol{H}'(\omega) = \frac{\boldsymbol{V}(\omega)}{\boldsymbol{F}(\omega)} = \boldsymbol{H}(\omega)\omega\mathrm{j}.$$

Exemple 2. Sistema excitat a través d'una molla.

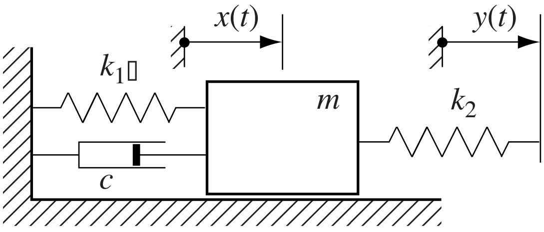

Figura 2

L'equació del moviment del sistema massa-molla-amortidor de la figura 2, excitat a través d'una molla és:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k_1 x(t) = k_2(y(t) - x(t))$$
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + (k_1 + k_2)x(t) = k_2 y(t)$$

Si es considera $y(t)$ com la entrada del sistema i $x(t)$ com la sortida, aleshores la funció de resposta freqüencial del sistema és:

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{\boldsymbol{X}(\omega)}{\boldsymbol{Y}(\omega)} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \frac{1}{(1 - \rho^2) + 2\zeta\rho\mathrm{j}} \quad \text{amb}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{m(k_1 + k_2)}}; \quad \rho = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{m}}.$$

La funció de resposta freqüencial no és única; es pot generalitzar per a qualsevol sistema lineal i per a qualsevol parella entrada-sortida.

Dues funcions de resposta freqüencial molt utilitzades en mecànica, acústica i electricitat són la impedància $\boldsymbol{Z}(\omega)$ i la seva inversa, l'admitància $\boldsymbol{Y}(\omega)$. La impedància relaciona

Mecànica: Força/velocitat $\boldsymbol{Z}(\omega) = \boldsymbol{F}(\omega)/\boldsymbol{V}(\omega)$

Acústica: Pressió/velocitat $\boldsymbol{Z}(\omega) = \boldsymbol{P}(\omega)/\boldsymbol{V}(\omega)$

Electricitat: Tensió/corrent $\boldsymbol{Z}(\omega) = \boldsymbol{U}(\omega)/\boldsymbol{I}(\omega)$

5. Representació gràfica de la funció de resposta freqüencial

La funció de resposta freqüencial (Figura 3) com a valor complex que depèn de la freqüència es pot representar com:

Resposta freqüencial

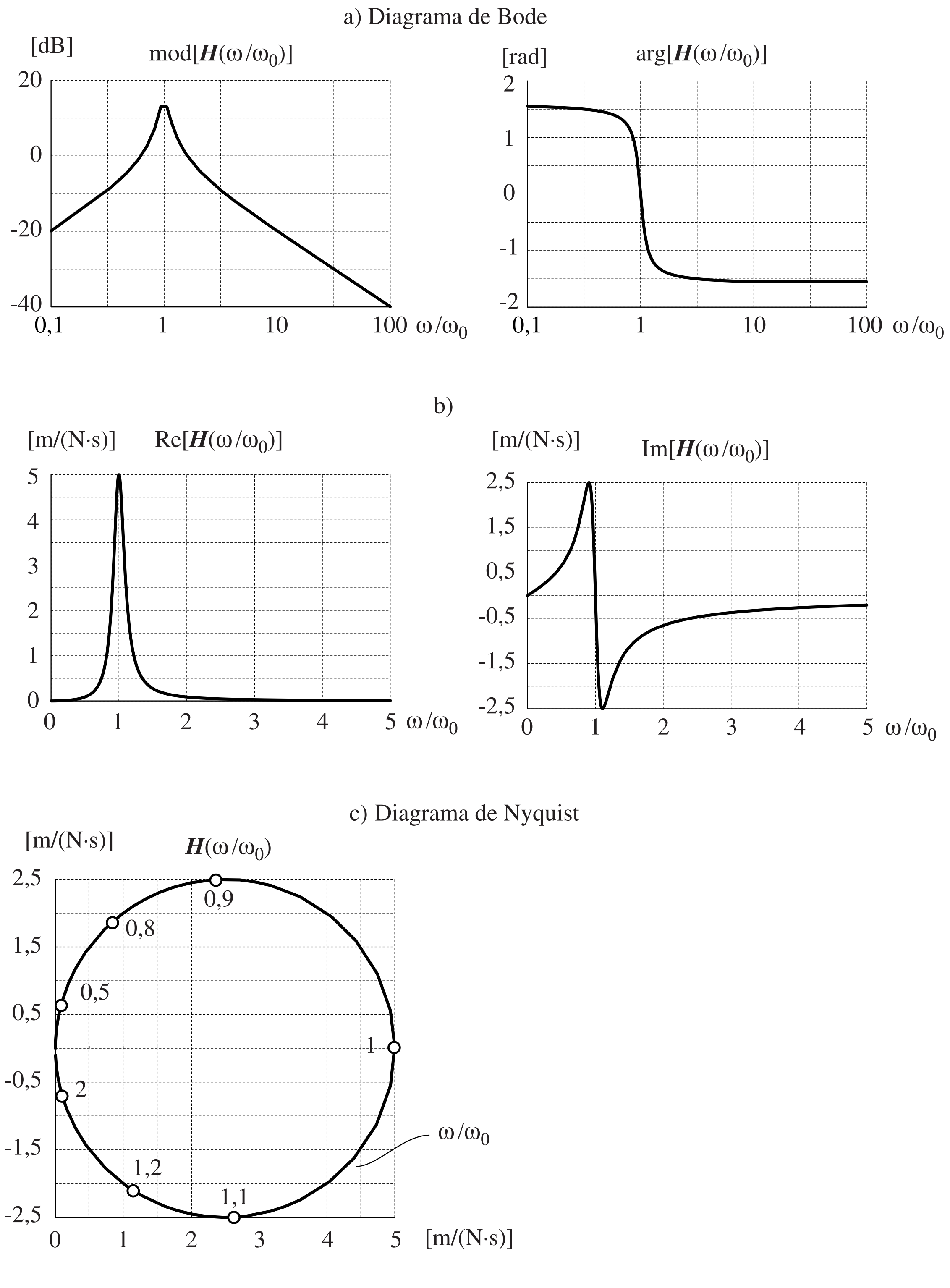

Figura 3. Resposta freqüencial. *a*) Diagrama de Bode. *b*) Diagrama d'Argand. *c*) Diagrama de Nyquist.

a) Diagrama de Bode: gràfics independents del mòdul i de l'argument de $\boldsymbol{H}(\omega)$ en funció de la freqüència.

b) Diagrama d'Argand: gràfics independents de la part real i de la part imaginària de $\boldsymbol{H}(\omega)$ en funció de la freqüència.

c) Diagrama de Nyquist: corba definida per $\boldsymbol{H}(\omega)$ en el pla complex amb la freqüència com a paràmetre.

En les representacions de Bode i d'Argand, les escales poden ser lineals o logarítmiques. Les escales logarítmiques de freqüències es poden expressar en logaritme decimal o en logaritme binari, de base 2. En el primer cas, s'introdueix el concepte de dècada, multiplicar per deu la freqüència, i en el segon cas, usual en acústica, s'introdueix el concepte d'octava. Una freqüència és l'octava d'una altra si és doble d'aquesta.

L'escala logarítmica de l'amplitud sovint s'expressa en dB. El valor numèric d'una magnitud x expressat en dB referits a x_0 (valor de referència) és: $20\log_{10}\left(x/x_0\right)$.

6. Resposta a una entrada sinusoïdal

L'estudi de la resposta $x(t)$ d'un sistema lineal a una excitació sinusoïdal $y(t) = y_\mathrm{p}\cos\left(2\pi f_1 t\right) = y_\mathrm{p}\cos\left(\omega_1 t\right)$ es pot fer a partir de la seva funció de resposta freqüencial. En aquest cas serà útil escriure-la de manera que quedin explícits el seu mòdul i el seu argument $\boldsymbol{H}(\omega) = H(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$. Cal també tenir en compte que, com es pot deduir de la seva definició, $\boldsymbol{H}(\omega) = \boldsymbol{H}^*(-\omega)$ i per tant $H\left(\omega\right) = H\left(-\omega\right)$ i $\varphi\left(\omega\right) = -\varphi\left(-\omega\right)$. Així, recordant la transformada de Fourier de la funció cosinus:

$$\boldsymbol{X}\left(\omega\right) = \boldsymbol{H}(\omega)\,\boldsymbol{Y}\left(\omega\right) = y_\mathrm{p}\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{H}(\omega_1)\,\delta(\omega-\omega_1) + \boldsymbol{H}(-\omega_1)\,\delta(\omega+\omega_1)\right] =$$
$$= y_\mathrm{p} H\left(\omega_1\right)\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega_1)}\,\delta(\omega-\omega_1) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(\omega_1)}\,\delta(\omega+\omega_1)\right]$$

d'on $x(t) = H\left(\omega_1\right)y_\mathrm{p}\cos\left(\omega_1 t + \varphi\left(\omega_1\right)\right)$.

Així doncs, si l'excitació és sinusoïdal l'amplitud de la resposta és el producte de l'amplitud de l'excitació pel mòdul de la resposta freqüencial per a la freqüència de

l'excitació, $x_p = H(\omega_1) y_p$. La resposta està desfasada respecte a l'entrada un angle igual a l'argument de la resposta freqüencial per a la freqüència de l'excitació.
En l'exemple 1 presentat en l'apartat anterior, s'estudia la relació entre la força d'excitació aplicada a un sistema d'un grau de llibertat i el seu moviment. De les expressions trobades es pot obtenir $H(\omega_1)$ i $\varphi(\omega_1)$:

$$H(\omega_1) = \frac{1}{k} \frac{1}{\left[\left(1-\rho^2\right)^2 + \left(2\zeta\rho\right)^2\right]^{1/2}} \ , \ \varphi(\omega_1) = \arg\left[\left(1-\rho^2\right) + 2\zeta\rho \mathrm{j}\right] \text{ , amb } \rho = \frac{\omega_1}{\omega_0} .$$

Cal recordar que l'argument φ d'un nombre complex z situat en el primer o quart quadrant és directament $\varphi = \arctan\left(\mathrm{Im}[z]/\mathrm{Re}[z]\right)$, però si z està situat al segon o tercer quadrant aleshores $\varphi = \arctan\left(\mathrm{Im}[z]/\mathrm{Re}[z]\right) + \pi$, ja que la funció arctangent està definida entre $-\pi/2$ i $+\pi/2$.

Aquestes expressions estan lligades amb el factor d'amplificació i l'angle de fase estudiats per altres procediments i que permeten escriure que si $F(t) = F_p \cos(\omega_1 t)$,

$$x(t) = H(\omega_1) F_p \cos\left(\omega_1 t + \varphi(\omega_1)\right) .$$

7. Resposta impulsional

Per a un sistema lineal passiu de coeficients constants amb una entrada $y(t)$ i una sortida $x(t)$, es defineix la seva resposta impulsional $h(t)$ com el qüocient entre la resposta a un impuls, a partir de condicions inicials nul·les, i la magnitud d'aquest. Una excitació impulsional es representa mitjançant la funció delta de Dirac de valor igual a la integral de l'excitació, que dura un temps τ que tendeix a 0:

$$y(t) = I\,\delta(t) \text{ amb } I = \int_\tau y(t)\,\mathrm{d}t .$$

Si l'entrada és una força, un impuls es pot entendre com una força molt gran aplicada durant un temps τ molt petit de manera que la integral

$$P = \int_{\tau\to 0} F(t)\mathrm{d}t$$

és finita. P s'anomena percussió de $F(t)$ i es diu que en aplicar una percussió a un sistema aquest sofreix una batzegada, fenomen intantani en el qual es produeix una modificació de la velocitat però no de la posició. L'increment de velocitat causat per la percussió es determina a partir del teorema de la quantitat de moviment

$$\Delta(mv) = \int F(t)\,\mathrm{d}t = P \quad \text{d'on} \quad \Delta v = P/m .$$

Just després de la batzegada, el sistema passa a oscil·lar lliurement. Així doncs, la resposta a un impuls de força correspon al moviment lliure a partir de les condicions inicials de desplaçament nul i de velocitat l'adquirida durant la batzegada, $x(0) = 0, \dot{x}(0) = P/m$. Amb aquestes condicions inicials el moviment lliure és:

$$x(t) = \frac{P}{m\omega_\mathrm{d}} \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_\mathrm{d} t) \text{ amb } \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \omega_\mathrm{d} = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

i per tant la resposta impulsional en aquest cas és:

$$h(t) = \frac{x(t)}{P} = \frac{1}{m\omega_\mathrm{d}} \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_\mathrm{d} t) .$$

Cal fer atenció a les unitats, ja que les unitats de la funció $\delta(t)$ són s^{-1} i les d'un impuls d'una magnitud són les de la magnitud multiplicades per s. Així per exemple, l'impuls d'una força, la seva percussió, es mesura en N·s i per tant la resposta impulsional, prenent la sortida com el desplaçament, es mesura en m/(N·s).

En els sistemes passius la resposta, a partir del repòs en la configuració d'equilibri – condicions inicials nul·les–, no comença fins que s'inicia l'excitació i per tant $h(t) = 0$ per a $t < 0$.

8. Resposta temporal a una excitació arbitrària. Integral de convolució

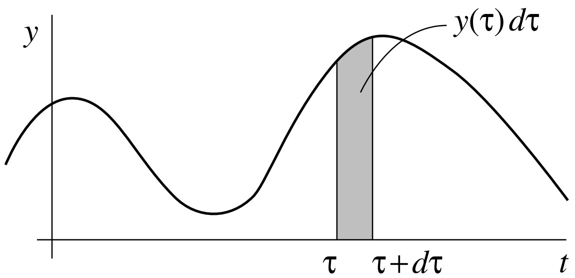

Figura 4

Una funció $y(t)$ es pot considerar com un tren, o una successió, d'impulsos de valor $y(\tau)\mathrm{d}\tau$ situats a $t = \tau$; de manera intuïtiva es pot veure a la figura 4, a més:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)\, \delta(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau .$$

Si l'excitació d'un sistema lineal passiu $y(t)$ es considera formada per una succesió d'impulsos, la seva resposta temporal és la superposició de les respostes a cadascun dels impulsos de l'excitació. Per a un impuls situat a $t = \tau$, la resposta és

$x_\tau(t) = h(t-\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, per a $t > \tau$, i $x_\tau(t) = 0$, per a $t < \tau$, en tractar-se d'un sistema passiu. La resposta total en l'instant t és la superposició de les respostes als impulsos $y(\tau)\mathrm{d}\tau$ existents des que s'inicia l'excitació a partir del repós –es pren des de $-\infty$ per garantir que es recull tota l'excitació– fins a t:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Aquesta expressió s'anomena integral de convolució o alternativament integral de Duhamel o integral de Green.

Si l'excitació comença a $t = 0$, $y(t) = 0$ per a $t < 0$, la integral de convolució es pot escriure:

$$x(t) = \int_{0}^{t} h(t-\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Una altra versió de la integral de convolució s'obté tenint en compte que $h(t-\tau) = 0$ per a $\tau > t$ i per tant el límit superior de la integral es pot fer ∞:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Altres versions s'obtenen simplement fent el canvi de variable d'integració $\theta = t-\tau$.

Aquesta integral de convolució és la mateixa que apareix en el producte de convolució o integral de convolució associat a les transformades de Fourier i de Laplace. Per a la transformada de Fourier, i de manera semblant per a la transformada de Laplace, admetent l'existència de les transformades de les funcions temporals implicades, es verifica:

$$\mathrm{TF}[x(t)\cdot y(t)] = \boldsymbol{X}(\omega) * \boldsymbol{Y}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{X}(f-\varphi)\,\boldsymbol{Y}(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{TF}^{-1}\left[\boldsymbol{H}(\omega)\cdot\boldsymbol{Y}(\omega)\right] = h(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Aquesta última expressió coincideix amb les trobades anteriorment però no està condicionada que la funció d'excitació sigui d'energia finita i per tant és aplicable sigui quina sigui l'excitació.

9. Relació entre la resposta freqüencial i la resposta impulsional

Si s'excita un sistema de resposta impulsional $h(t)$ amb un impuls $y(t) = I\,\delta(t)$ la seva resposta temporal és $x(t) = I\,h(t)$. Per altra banda, la transformada de Fourier de l'excitació és $\boldsymbol{Y}(\omega) = I$ i la transformada de la resposta és $\boldsymbol{X}(\omega) = I\,\mathrm{TF}[h(t)]$, de manera que la resposta freqüencial és:

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{\boldsymbol{X}(\omega)}{\boldsymbol{Y}(\omega)} = \frac{I\,\mathrm{TF}[h(t)]}{I} = \mathrm{TF}[h(t)] .$$

Així doncs, la transformada de Fourier de la resposta impulsional és la resposta freqüencial. Cal notar que, per als sistemes passius, la resposta impulsional és sempre un transitori d'energia finita i per tant es compleix la condició d'existència de la seva transformada de Fourier.

10. Bibliografia

Ras E. *Análisi de Fourier y Cálculo Operacional aplicados a la electrotécnia*. Barcelona, Marcombo Boixereau Editores, 1979.

Newland, D.E. *Mechanical Vibration. Analysis and Computation*. England, Ed. Longman, 1989.

Newland, D.E. *Random Vibration. Spectral amb Wavelet Analysis*. 3a Ed. England, Ed. Longman, 1993.

Meirovitch, L. *Analytical methods in vibrations*. New York, Ed. MacMillan Company, 1967.